Esame di Ricerca Operativa del 18/9/2019

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. (a) Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ \quad - x_2 \leq 8 \\ x_1 \quad \leq 5 \\ 3x_1 - x_2 \leq 10 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{3,4}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

(b) Si rimpiazzi il vincolo $x_1 \leq 5$, con $x_1 \leq a$. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, la base $B = \{3, 5\}$ é ottimale.

(c) Dire se il problema ammette soluzioni di base degeneri.

Esercizio 2. Un allevatore possiede 5 tipi di animali $A_1, A_2, .., A_5$, che vengono nutriti mediante i mangimi $M_1, M_2, ..., M_6$. Nella tabella seguente sono elencati gli animali ai quali ciascun tipo di mangime puo' essere assegnato e, nell'ultima riga, i costi c_j, $j = 1, .., 6$, di ciascun tipo di mangime.

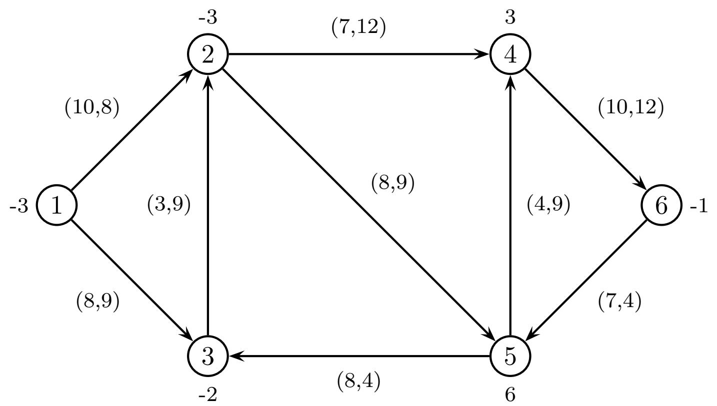
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
A_1		*	*		*	
A_2	*		*	*		*
A_3	*	*		*	*	
A_4			*	*	*	
A_5	*				*	*
costo c_j	9	6	8	10	15	8

Per vincoli di carattere contrattuale, l'acquisto del mangime M_5 comporta l'acquisto di uno dei due mangimi M_1 o M_2. Si formuli un problema di programmazione lineare per determinare quali mangimi conviene acquistare in modo da nutrire con almeno un mangime tutti gli animali minimizzando il costo complessivo.

variabili decisionali:

modello:

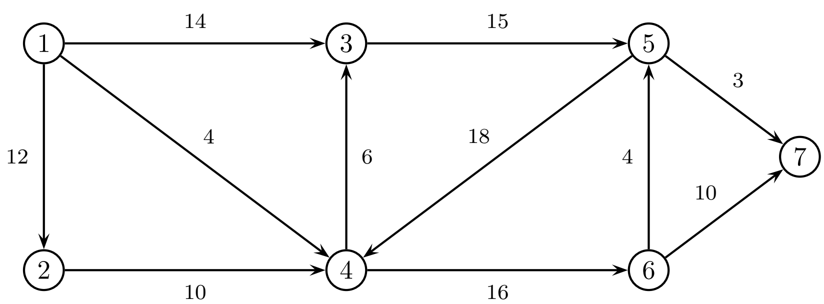
Esercizio 3. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso per il problema di flusso di costo minimo definito dalla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,4) (2,5) (5,3) (6,5)	
Archi di U	(3,2)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

(b) Discutere la degenerazione delle soluzioni di base x e π determinate alla prima iterazione. Giustificare le risposte.

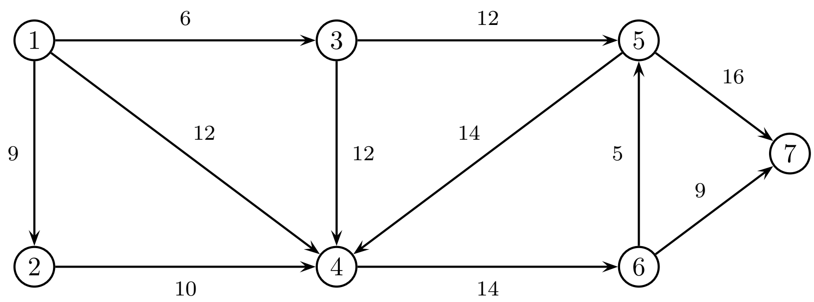
Esercizio 4. (a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

(b) Nella rete definita al punto (a) sia $k \in \mathbb{R}$ il costo dell'arco $(5,4)$. Si dica per quali valori di k il problema della determinazione dell'albero dei cammini minimi di radice 1 ammette ottimo finito. Giustificare la risposta.

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

(b) Discutere l'unicitá del taglio di capacitá minima.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ \quad - x_2 \le 8 \\ x_1 \qquad \le 5 \\ 3x_1 - x_2 \le 10 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	$\{3, 4\}$	$(5,\ 5)$	$(0,\ 0,\ 5,\ -2,\ 0)$	4	9	5
Iterazione 2	$\{3, 5\}$	$(5,\ 14)$	$(0,\ 0,\ 3,\ 0,\ 2,)$			
Iterazione 3						
Iterazione 4						

(b) Si rimpiazzi il vincolo $x_1 \le 5$, con $x_1 \le a$. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, la base $B = \{3, 5\}$ é ottimale.

La soluzione di base associata alla base $B = \{3, 5\}$ é $x(a) = (a, 2a + 4)$. Essendo la base $B = \{3, 5\}$ ottima per il problema definito in (a), affinche' lo sia anche per il problema con il nuovo vincolo bastera' che la soluzione $x(a)$ sia ammissibile per quest'ultimo problema, ossia che sia soddisfatto il sistema $A_N x(a) \le b_N$, ove $N = \{1, 2, 4\}$:

$$\begin{cases} a - 2a - 4 \le 0 \\ -2a - 4 \le 8 \\ 3a - 2a - 4 \le 10 \end{cases}$$

IL precedente sistema ammette soluzione $-4 \le a \le 14$.

(c) La soluzione di base $(5,\ 5)$ é degenere, infatti aderisce ai vincoli $1, 3, 4$.

Esercizio 2.

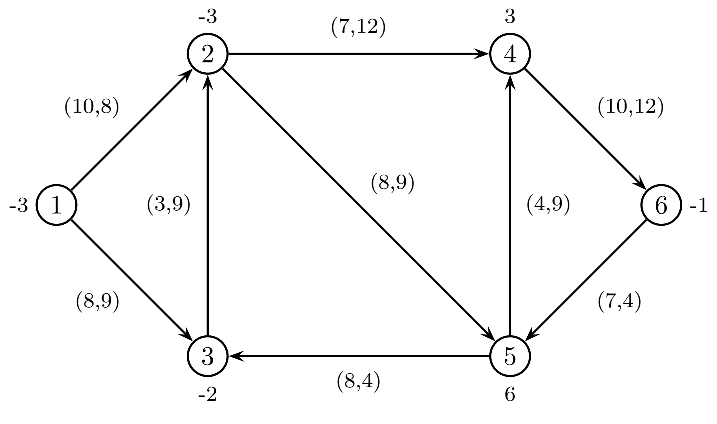
Variabili decisionali:

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{se l'allevatore acquista il mangime } M_j \\ 0,\ \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, ..., 6;$$

Modello:

$$\begin{cases} \min\ 9x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 15x_5 + 8x_6 \\ x_2 + x_3 + x_5 \ge 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_6 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \ge 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 \ge 1 \\ x_1 + x_5 + x_6 \ge 1 \\ x_1 + x_2 - x_5 \ge 0 \\ x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, ..6. \end{cases}$$

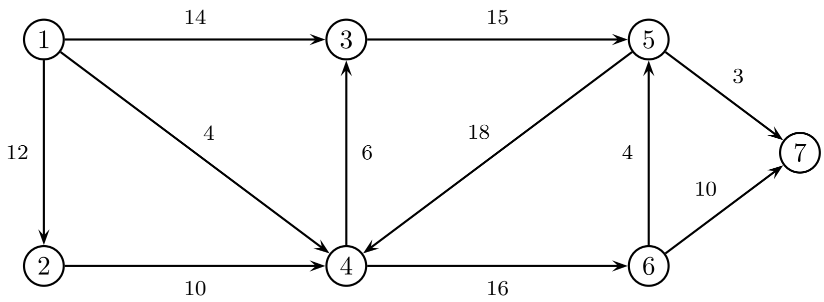
Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso per il problema di flusso di costo minimo definito dalla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,4) (2,5) (5,3) (6,5)	(1,3) (2,4) (2,5) (3,2) (6,5)
Archi di U	(3,2)	
x	(0, 3, 3, 9, 9, 0, 4, 0, 1)	(0, 3, 3, 5, 5, 0, 0, 0, 1)
π	(0, −8, 8, −1, 0, −7)	(0, 11, 8, 18, 19, 12)
Arco entrante	(3,2)	(1,2)
ϑ^+, ϑ^-	$+\infty$, 4	8 , 3
Arco uscente	(5,3)	(1,3)

(b) La soluzione x relativa alla prima iterazione é degenere essendo gli archi $(2,5)$ e $(5,3)$ saturi, mentre la soluzione π é non degenere essendo i costi ridotti $\bar{c}_{ij}$ diversi da 0, per ogni arco $(i,j) \notin T$.

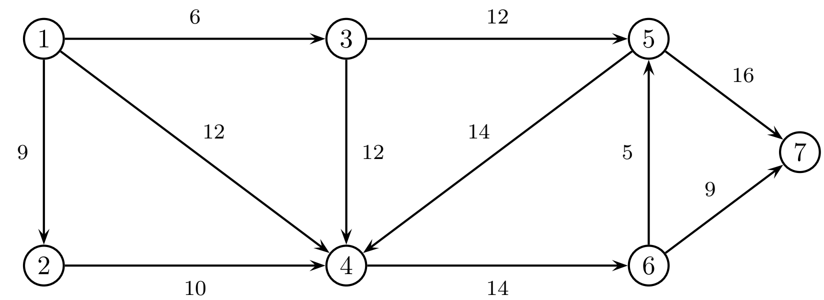
Esercizio 4. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		3		2		6		5		7	
nodo 2	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 3	14	1	10	4	10	4	10	4	10	4	10	4	10	4
nodo 4	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 5	$+\infty$	−1	$+\infty$	−1	25	3	25	3	24	6	24	6	24	6
nodo 6	$+\infty$	−1	20	4	20	4	20	4	20	4	20	4	20	4
nodo 7	$+\infty$	−1	$+\infty$	−1	$+\infty$	−1	$+\infty$	−1	30	6	27	5	27	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 5, 6		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

(b) L'arco $(5,4)$ appartiene ai cicli orientati $4-3-5-4$ e $5-4-6-5$ di costi $k+21$ e $k+20$ rispettivamente. Dovendo essere entrambi i costi non negativi, il problema ammette ottimo finito per $k \geq -20$.

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 6, 0, 0)	6
1 - 4 - 6 - 7	9	(0, 6, 9, 0, 6, 0, 9, 0, 6, 0, 9)	15
1 - 4 - 6 - 5 - 7	3	(0, 6, 12, 0, 9, 3, 12, 0, 9, 3, 9)	18
1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7	2	(2, 6, 12, 2, 0, 6, 14, 0, 11, 5, 9)	20

Taglio di capacitá minima: $N_s = \{1, 2, 4\}$ $N_t = \{3, 5, 6, 7\}$

(b) Non vi e' unicitá del taglio di capacitá minima: il taglio $N_s = \{1, 2, 4, 6\}$ $N_t = \{3, 5, 7\}$ ha anch'esso capacitá 20 .