Esame di Ricerca Operativa del 19/02/2019

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Risolvere il seguente problema di programmazione lineare applicando l'algoritmo del simplesso:

$$\begin{cases} \max\ 5x_1 - 3x_2 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - \ x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{1,5}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare ($\mathcal{P}$):

$$\begin{cases} \max -4x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$$

(a) Si verifichi se $\bar{x} = (-1/2, 0)$ sia una soluzione di base per ($\mathcal{P}$);
(b) Si verifichi se $\bar{x} = (-1/2, 0)$ sia una soluzione ottima per ($\mathcal{P}$);
(c) Si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime di ($\mathcal{P}$);
(d) Si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di ($\mathcal{P}$).

Esercizio 3. Un' azienda che gestisce un servizio postale, deve effettuare n consegne avendo a disposizione m corrieri. La retribuzione richiesta dal corriere i-esimo per effettuare la consegna j-esima é c_{ij}, $i = 1, .., m$, $j = 1, .., n$. L'attivitá di consegna e' inoltre subordinata alle seguenti condizioni:

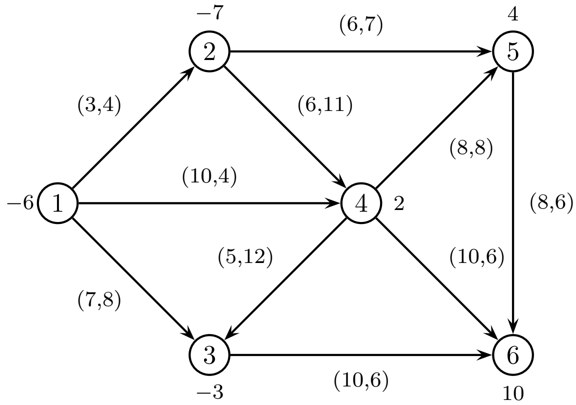
- U_j é il tempo (in ore) necessario per effettuare la consegna j-esima, $j = 1, .., n$.
- Ciascun corriere non puo' lavorare piú di 10 ore e deve effettuare almeno due consegne.
- E' data una lista L di coppie di consegne incompatibili tra loro, ovvero che non possono essere effettuate dallo stesso corriere.

Si formuli un problema di programmazione lineare per determinare un programma di consegne che minimizzi il costo complessivo sostenuto dall'azienda.

variabili decisionali:

modello:

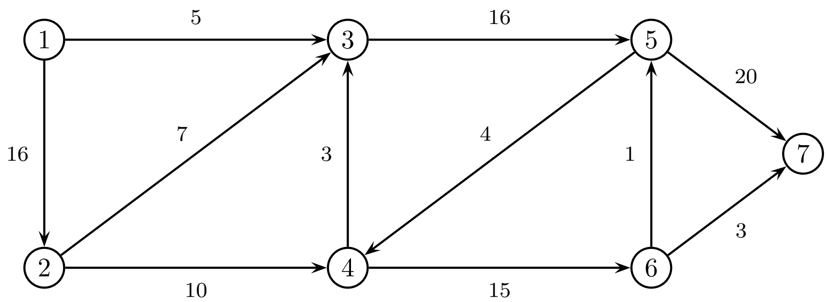
Esercizio 4. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso per il problema di flusso di costo minimo definito dalla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,4) (2,5) (3,6) (5,6)	
Archi di U	(1,4) (4,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

(b) Si discuta la degenerazione della soluzione π determinata alla prima iterazione.

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla rete:



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

(b) Si determini una soluzione ottima del problema duale associato al problema definito al punto a).

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla rete definita nell'esercizio 5, ove i valori indicati sono interpretati come capacitá sugli archi.

cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

(b) Si formuli il problema duale associato al problema del flusso massimo definito in a) e se ne determini una soluzione ottima discutendone l'unicitá.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere il seguente problema di programmazione lineare applicando l'algoritmo del simplesso:

$$\begin{cases} \max\ 5x_1 - 3x_2 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - \ x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	$\{1,\ 5\}$	$(-2,\ 0)$	$(-2,\ 0,\ 0,\ 0,\ -5)$	1	$2\ \ \frac{9}{2}$	2
Iterazione 2	$\{2,\ 5\}$	$(0,\ 2)$	$(0,\ 2,\ 0,\ 0,\ -7)$	5	$1\ \ 3$	3
Iterazione 3	$\{2,\ 3\}$	$(2,\ 3)$	$\left(0, -\frac{4}{5}, \frac{7}{5},\ 0,\ 0,\right)$	2	$5\ \ 5$	1
Iterazione 4	$\{1,\ \ 3\}$	$(1, 0)$	$\left(\frac{4}{3},\ 0, \frac{5}{3},\ 0,\ 0,\right)$			

Esercizio 2.
(a) Siccome $\bar{x}$ ha un solo vincolo attivo, il secondo, $\bar{x}$ non può essere una soluzione di base per $(\mathcal{P})$.

(b) Considerando la coppia di problemi primale e duale

$$(\mathcal{P})\quad \begin{array}{c} \max\ c^T x \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (\mathcal{D})\quad \begin{array}{l} \min\ y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{array}$$

il teorema forte della dualità ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile per $(\mathcal{P})$. Allora, $\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per $(\mathcal{D})$ complementare a $\bar{x}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verifichino le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$

Per l'ammissibilità di $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(\mathcal{P})\quad \begin{array}{rrcrcl} \max & -4x_1 & + & 2x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \end{array} \qquad (\mathcal{D})\quad \begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & + & 5y_4 & & \\ & -y_1 & - & 2y_2 & & & + & y_4 & = & -4 \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Si noti che $\bar{x} = (-1/2, 0)$ è ammissibile per $(\mathcal{P})$, e soddisfa solo il secondo vincolo. Di conseguenza, una soluzione duale $\bar{y}$ che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $\bar{y}_1 = \bar{y}_3 = \bar{y}_4 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), $\bar{y}$ deve inoltre soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} -2y_2 & = -4 \\ \ y_2 & = 2, \quad y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette come unica soluzione $y_2 = 2$. Essendo y_2 non negativa, $\bar{x}$ è una soluzione ottima di $(\mathcal{P})$, e $\bar{y} = (0, 2, 0, 0)$ è l'unica soluzione ottima del problema duale (ciò permette anche di rispondere al quesito (d)).

(c) Poiché $\bar{y}$ è una soluzione ottima del problema duale avente $\bar{y}_2$ come unica componente non nulla, applicando nuovamente il teorema degli scarti complementari otteniamo che una qualsiasi soluzione ottima per $(\mathcal{P})$ deve avere il secondo vincolo attivo. Pertanto, l'insieme delle soluzioni ottime di $(\mathcal{P})$ è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ & & x_2 & \leq & 2 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \end{array}$$

Posto $x_1 = \alpha$, il sistema di equazioni ammette infinite soluzioni della forma $x(\alpha) = (\alpha, 2\alpha + 1)$, $\alpha \leq 0$, che sono quindi tutte e sole le soluzioni ottime di $(\mathcal{P})$.

(d) Si veda la risposta al quesito (b).

Esercizio 3.

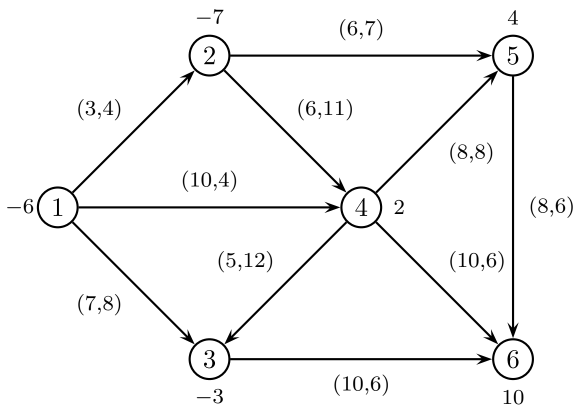
Variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il corriere } i \text{ effettua la consegna } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, .., m, \quad j = 1, .., n$$

Modello:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, .., n \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} U_j x_{ij} \leq 10 \quad i = 1, .., m \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq 2 \quad i = 1, .., m \\ x_{ih} + x_{ik} \leq 1, \ (h,k) \in L, i = 1, .., m \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \ i = 1, ..m, \quad j = 1, .., n \end{cases}$$

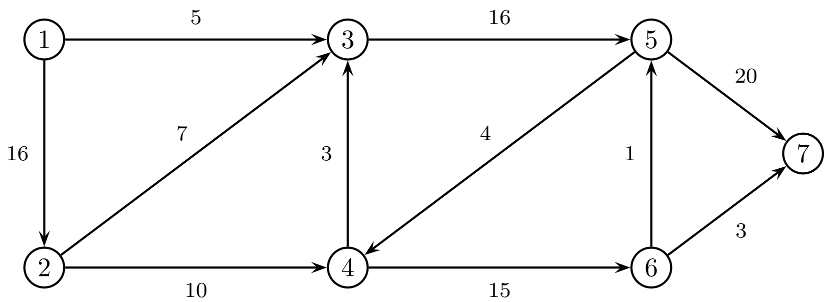
Esercizio 4. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso per il problema di flusso di costo minimo definito dalla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,4) (2,5) (3,6) (5,6)	(1,3) (1,4) (2,4) (3,6) (5,6)
Archi di U	(1,4) (4,5)	(4,5)
x	(0, 2, 4, 6, 1, 5, 0, 8, 0, 5)	(0, 3, 3, 7, 0, 6, 0, 8, 0, 4)
π	(0, 3, 7, 9, 9, 17)	(0, 4, 7, 10, 9, 17)
Arco entrante	(1,4)	(1,2)
ϑ^+, ϑ^-	1 , 1	4 , 3
Arco uscente	(2,5)	(1,4)

(b) La soluzione π determinata alla prima iterazione e' degenere essendo $\bar{c}_{12} := c_{12} + \pi_1 - \pi_2 = 0$.

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla rete:



a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		5		4		6		7	
nodo 2	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1
nodo 3	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	2	25	5	25	5	25	5	25	5
nodo 5	$+\infty$	-1	21	3	21	3	21	3	21	3	21	3	21	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	40	4	40	4	40	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	41	5	41	5	41	5	41	5
insieme Q	2, 3		2, 5		4, 5		4, 7		6, 7		7		$\emptyset$	

(b) Una soluzione ottima del problema duale associato al problema della ricerca delll'albero dei cammini minimi definito al punto (a) é: $\pi = (0, 16, 5, 25, 21, 40, 41)$.

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla rete definita nell'esercizio 5.

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	5	(0, 5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 5, 0, 0)	5
1 - 2 - 3 - 5 - 7	7	(7, 5, 7, 0, 5, 0, 0, 0, 12, 0, 0)	12
1 - 2 - 4 - 6 - 7	3	(10, 5, 7, 3, 12, 0, 3, 0, 12, 0, 3)	15
1 - 2 - 4 - 3 - 5 - 7	3	(13, 5, 7, 6, 15, 3, 3, 0, 15, 0, 3)	18
1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7	1	(14, 5, 7, 7, 15, 3, 4, 0, 16, 1, 3)	19

Taglio di capacitá minima: $N_s = \{1, 2, 4, 6\}$ $N_t = \{3, 5, 7\}$

(b) Il problema duale del problema del massimo flusso é:

$$\begin{cases} \min \sum_{(i,j)\in A} \mu_{ij} u_{ij} \\ \pi_i - \pi_j + \mu_{ij} \geq 0,\ (i,j) \in A \\ \pi_n - \pi_1 \geq 1 \\ \mu_{ij} \geq 0,\ (i,j) \in A \end{cases}$$

ove A e' l'insieme degli archi della rete e $u^T = (16, 5, 7, 10, 16, 3, 15, 4, 20, 1, 3)$. $\pi \in \mathbb{R}^7$, $\mu \in \mathbb{R}^{11}$.
Una soluzione ottima del problema duale é $(\bar{\pi}^T, \bar{\mu}^T)$ ove:

$$\bar{\pi}_i = \begin{cases} 0,\ i \in N_s \\ 1\ i \in N_t \end{cases},\ i = 1, .., 7, \quad \bar{\mu}_{ij} = \begin{cases} 1,\ se\ i \in N_s\ e\ \ j \in N_t \\ 0\ altrimenti \end{cases},\ (i,j) \in A,$$

ove (N_s, N_t) é un taglio di capacitá minima.

La soluzione ottima del duale non é unica infatti é facile verificare che $(\bar{\pi}_1 + k, \bar{\pi}_2 + k, ..., \pi_7 + k, \bar{\mu}^T)$, $k \in \mathbb{R}$ é una soluzione ammissibile per il duale che porge lo stesso valore della funzione obbiettivo (del problema duale) calcolato in $(\bar{\pi}^T, \bar{\mu}^T)$.