Esame di Ricerca Operativa del 19/07/19

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. (a) Risolvere mediante il metodo del simplesso il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -5\ x_1 + x_2 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 2 \\ -x_1 - 4\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{2,5}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

(b) Dire se il numero dei vertici della regione ammissibile del problema definito in (a) é inferiore al numero delle basi ammissibili. Giustificare la risposta.

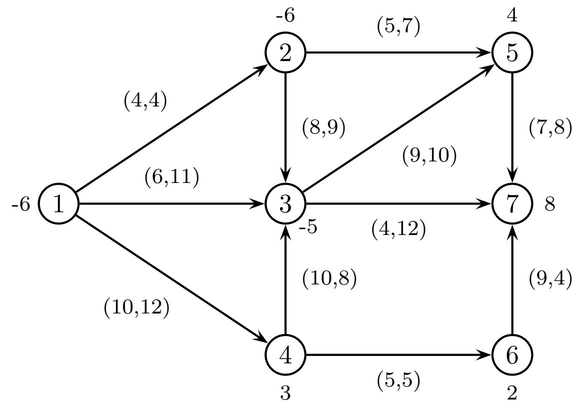
(c) Formulare il problema ausiliario associato al duale del problema definito in (a).

Esercizio 2. Una azienda intende produrre ogni anno n tipi di oggetti nelle quantità $b_1, ..., b_n$. Il costo di produzione di un singolo oggetto di tipo j nel mese i è dato da c_{ij}, $i = 1, .., 12$, $j = 1, .., n$. Sapendo che per ciascun mese i, il costo complessivo di produzione deve essere almeno s_i, $i = 1, .., 12$, si formuli un problema di programmazione lineare per stabilire quanti oggetti di ciascun tipo conviene produrre ogni mese in modo da minimizzare il costo complessivo di produzione annuale.

variabili decisionali:

modello:

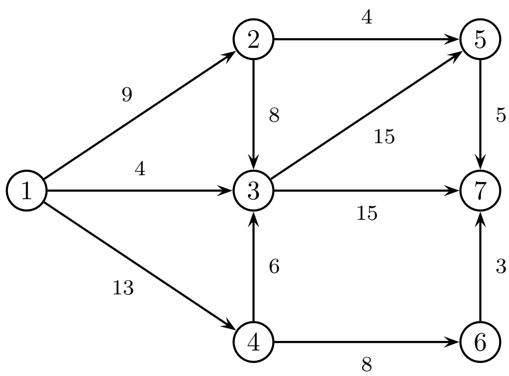
Esercizio 3. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7)	
Archi di U	(2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

(b) Discutere la degenerazione delle soluzioni x e π determinate alla prima iterazione.

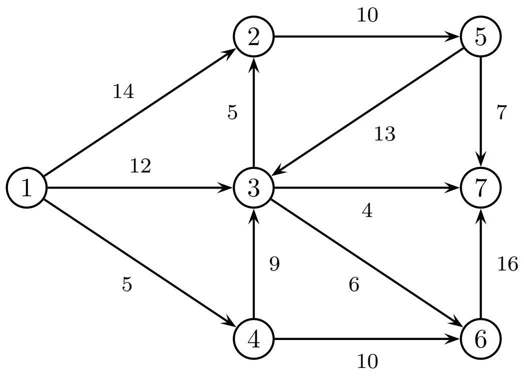
Esercizio 4. (a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

(b) Se i costi sugli archi fossero negativi, il problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1 definito in (a) avrebbe ancora ottimo finito? Giustificare la risposta.

Esercizio 5. (a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

(b) Con riferimento al problema definito in (a), dire se esiste una soluzione ammissibile tale che $x_{12} = 10,\ x_{13} = 10,\ x_{14} = 5$, ed, eventualmente, determinarla. Giustificare la risposta.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -5\ x_1 + x_2 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 2 \\ -x_1 - 4\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{2,\ 5\}$	$(2,\ -2)$	$\left(0,\ -\frac{21}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{4}{5}\right)$	2	$10,\ \frac{40}{9},\ 0$	4
2° iterazione	$\{4,\ 5\}$	$(2,\ -2)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{21}{5},\ -\frac{17}{5}\right)$	5	$\frac{70}{9},\ 5$	3
3° iterazione	$\{3,\ 4\}$	$(-1,\ 0)$	$\left(0,\ 0,\ \frac{17}{8},\ \frac{3}{8},\ 0\right)$			

(b) Dire se il numero dei vertici della regione ammissibile del problema definito in (a) é inferiore al numero delle basi ammissibili. Giustificare la risposta.

Si noti che la soluzione di base determinata alla prima iterazione $x = (2, -2)$ é degenere e ad essa sono associate le basi (2,5), (4,5). Pertanto il numero dei vertici della regione ammissibile del problema definito in (a) é inferiore al numero delle basi ammissibili.

(c) Formulare il problema ausiliario associato al duale del problema definito in (a).

Il problema duale associato al problema definito in (a) é:.

$$\begin{cases} \min(6y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 6y_5) \\ -y_1 + y_2 - 2y_3 - 2y_4 - y_5 = -5 \\ 3y_1 - y_2 - y_3 - 3y_4 - 4y_5 = 1 \\ y_i \geq 0, i = 1, .., 5 \end{cases}$$

Il problema ausiliario associato al precedente problema é:.

$$\begin{cases} \min(\epsilon_1 + \epsilon_2) \\ y_1 - y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 + \epsilon_1 = 5 \\ 3y_1 - y_2 - y_3 - 3y_4 - 4y_5 + \epsilon_2 = 1 \\ y_i \geq 0, i = 1, .., 5 \\ \epsilon_j \geq 0, j = 1, 2 \end{cases}$$

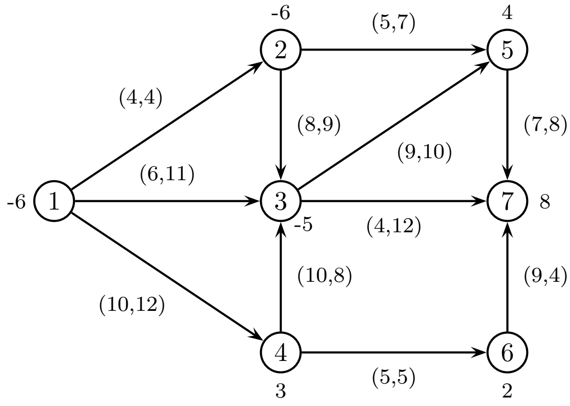
Esercizio 2. Variabili decisionali:

sia x_{ij} la quantitá di oggetti di tipo j da produrre nel mese i, $i = 1, .., 12$, $j = 1, .., n$;

Modello:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{12} x_{ij} = b_j,\ j = 1, .., n \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \geq s_i,\ i = 1, .., 12 \\ x_{ij} \in \mathbb{Z}_+,\ i = 1, .., 12, \quad j = 1, .., n. \end{cases}$$

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

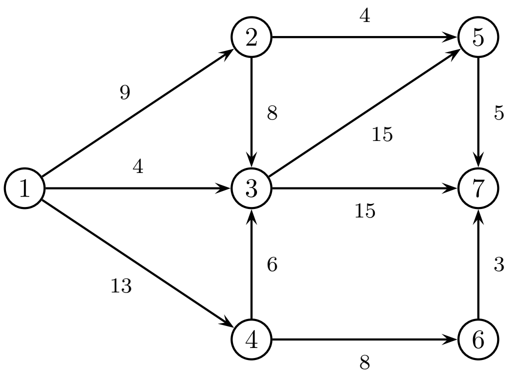


	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7)	(1,2) (1,3) (1,4) (3,7) (4,6) (5,7)
Archi di U	(2,5)	(2,5)
x	(1, 0, 5, 0, 7, 5, 0, 0, 2, 8, 0)	(1, 0, 5, 0, 7, 0, 5, 0, 2, 3, 0)
π	(0, 4, 6, 10, 15, 15, 22)	(0, 4, 6, 10, 3, 15, 10)
Arco entrante	(3,7)	(2,5)
ϑ^+, ϑ^-	12 , 5	7 , 1
Arco uscente	(3,5)	(1,2)

(b) Studiare la degenerazione delle soluzioni x e π determinate alla prima iterazione.

La soluzione x e' degenere essendo $x_{13} = 0$, $(1,3) \in T$. La soluzione π e' non degenere essendo i costi ridotti $\bar{c}_{ij} := c_{ij} + \pi_i - \pi_j \neq 0$, per ogni $(i,j) \notin T$.

Esercizio 4. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.

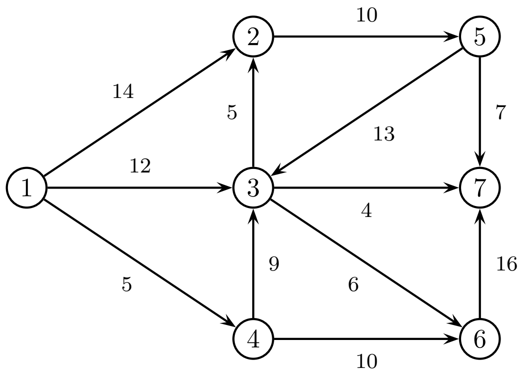


	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		4		5		7		6	
nodo 2	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
nodo 3	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 4	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1
nodo 5	$+\infty$	-1	19	3	13	2	13	2	13	2	13	2	13	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	21	4	21	4	21	4	21	4
nodo 7	$+\infty$	-1	19	3	19	3	19	3	18	5	18	5	18	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 4, 5, 7		4, 5, 7		5, 6, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

(b) Se i costi sugli archi fossero negativi, il problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1 definito in (a) avrebbe ancora ottimo finito?

La rete definita in (a) non presenta cicli orientati ed, in particolare, non puo' presentare cicli orientati di costo negativo anche in presenza di costi negativi sugli archi. Pertanto il problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1 definito in (a) ha ottimo finito anche nel caso in cui i costi sugli archi sono negativi.

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	4	(0, 4, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0)	4
1 - 2 - 5 - 7	7	(7, 4, 0, 7, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 7, 0)	11
1 - 3 - 6 - 7	6	(7, 10, 0, 7, 0, 6, 4, 0, 0, 0, 7, 6)	17
1 - 4 - 6 - 7	5	(7, 10, 5, 7, 0, 6, 4, 0, 5,0, 7, 11)	22

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

b) Dire se esiste una soluzione ammissibile, per il problema definito in a), tale che $x_{12} = 10,\ x_{13} = 10,\ x_{14} = 5$, ed, eventualmente, determinarla.

Una tale soluzione ammissibile non puo' esistere in quanto in una soluzione ammissibile la somma dei flussi degli archi (1,2), (1,3), (1,4) dovrebbe eguagliare il flusso corrente della rete che risulta sempre essere inferiore a 22 (il flusso massimo della rete). Nella soluzione proposta $x_{12} = 10,\ x_{13} = 10,\ x_{14} = 5$, implicherebbe che il flusso della rete fosse pari a 25, il che non e' possibile.