Esame di Ricerca Operativa del 1/02/2019

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. (a) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare applicando l'algoritmo del simplesso:

$$\begin{cases} \max\ -x_1 + x_2 \\ x_2 \le 0 \\ -4\ x_1 + x_2 \le 12 \\ 3\ x_1 + 2\ x_2 \le -6 \\ -x_2 \le 4 \\ x_1 \le 0 \\ 2\ x_1 + x_2 \le -3 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{3,6}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

(b) Discutere l'unicitá delle soluzioni ottime del problema definito in a) e del suo duale. Motivare la risposta.

(c) Si rimpiazzi nel problema definito in a) il vincolo $x_2 \le 0$ con il vincolo $x_2 \le a$. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, il problema ammette ottimo finito.

Esercizio 2. Una banca offre ai suoi clienti tre diversi tipi di prestito: mutuo casa, credito auto, credito aziendale, che rendono un interesse annuo rispettivamente del 4%, 8% e 7%. La banca ha a disposizione al piu' 400 milioni di euro e deve erogare i prestiti in modo che:

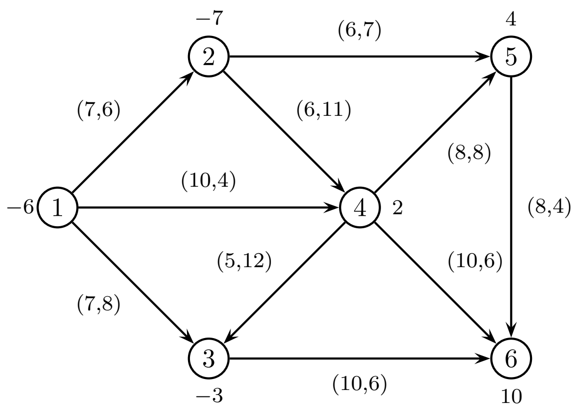
- il mutuo casa rappresenti almeno il 30% di tutti i prestiti erogati;
- il credito auto non superi il 50% degli altri due tipi di prestito erogati;
- gli interessi totali percepiti su tutti i prestiti non superino il 6% di tutti i prestiti erogati.

La banca vuole determinare quanti euro erogare per ogni tipo di prestito in modo da massimizzare il suo profitto.

variabili decisionali:

modello:

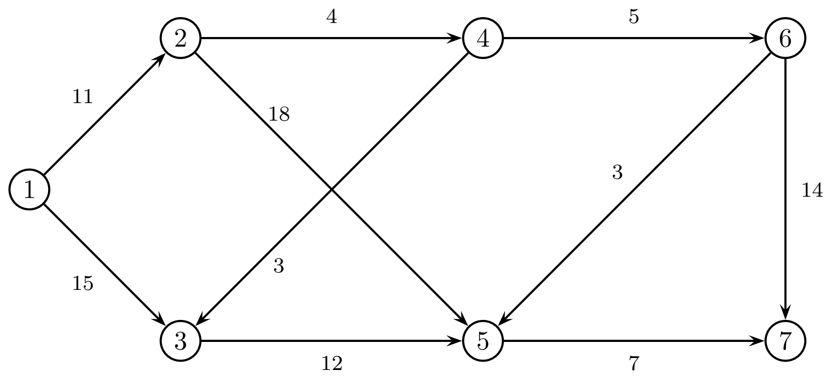
Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso per il problema di flusso di costo minimo definito dalla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,2) (1,4) (4,3) (4,5) (4,6)	
Archi di U	(2,4) (3,6)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 4. Si consideri la rete definita nell'esercizio 3. Si dica se il problema di flusso di costo minimo ammette una soluzione di base $\bar{x}$ tale che $\bar{x}_{12} = 0, \bar{x}_{13} = 2, \bar{x}_{14} = 4, \bar{x}_{24} = 6$, studiandone, eventualmente, l'ammissibilitá e la degenerazione.

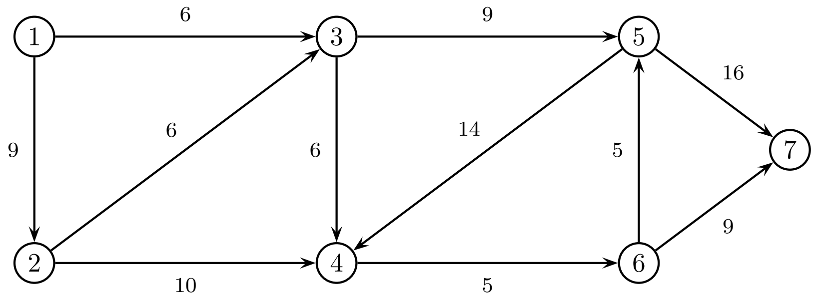
Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

(b) Si aggiunga alla rete l'arco (5,4) con costo $k \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di k il problema della determinazione dell'albero dei cammini minimi di radice 1 ammette ottimo finito.

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla rete:



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

(b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco $(5, 7)$. Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

SOLUZIONI

Esercizio 1. (a) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare applicando l'algoritmo del simplesso primale:

$$\begin{cases} \max\ -x_1 + x_2 \\ x_2 \leq 0 \\ -4\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 + 2\ x_2 \leq -6 \\ -x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 0 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq -3 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	$\{3,\ 6\}$	$(0,\ -3)$	$(0,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ -5)$	6	$1,\ \dfrac{15}{11}$	1
Iterazione 2	$\{1,\ 3\}$	$(-2,\ 0)$	$\left(\dfrac{5}{3},\ 0,\ -\dfrac{1}{3},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	3	3	2
Iterazione 3	$\{1,\ 2\}$	$(-3,\ 0)$	$\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)$			
Iterazione 4						

(b). Discutere l'unicitá delle soluzioni ottime del problema definito in a) e del suo duale. Motivare la risposta.

$(-3,\ 0)$ e $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ sono soluzioni ottime di base del problema in (a) e del suo duale. Essendo entrambe non degeneri tali soluzioni ottime sono uniche.

(c) Si rimpiazzi nel problema definito in a) il vincolo $x_2 \leq 0$ con il vincolo $x_2 \leq a$. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, il problema ammette ottimo finito.

Si noti che per $a < -4$ la regione ammissibile del problema e' vuota, infatti deve essere $-4 \leq x_2 \leq a$, da cui segue che $a \geq -4$.

Inoltre, per $a \geq -4$, la regione ammissibile e' non vuota ($x = (0, -4)$ é una soluzione ammissibile per ogni $a \geq -4$) ed e' limitata, cosicche' il problema ammette ottimo finito.

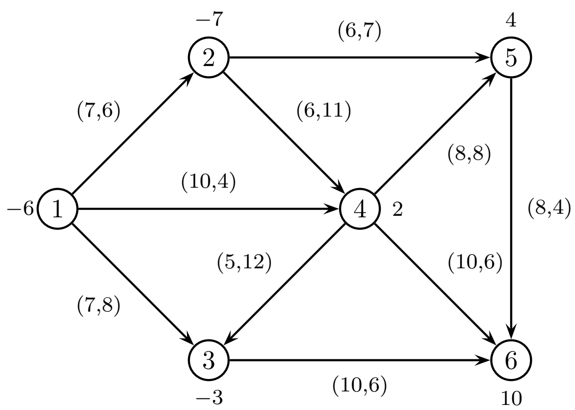
Esercizio 2.

Variabili decisionali:
x_1 = milioni di euro erogati per il mutuo casa
x_2 = milioni di euro erogati per il credito auto
x_3 = milioni di euro erogati per il credito aziendale

Modello:

$$\begin{cases} \max\ 0.04\, x_1 + 0.08\, x_2 + 0.07\, x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 400 \\ x_1 \geq 0.3\, (x_1 + x_2 + x_3) \\ x_2 \leq 0.5\, (x_1 + x_3) \\ 0.04\, x_1 + 0.08\, x_2 + 0.07\, x_3 \leq 0.06\, (x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso per il problema di flusso di costo minimo definito dalla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,2) (1,4) (4,3) (4,5) (4,6)	(1,2) (1,3) (4,3) (4,5) (4,6)
Archi di U	(2,4) (3,6)	(2,4) (3,6)
x	(4, 0, 2, 11, 0, 6, 3, 4, 4, 0)	(4, 2, 0, 11, 0, 6, 1, 4, 4, 0)
π	(0, 7, 15, 10, 18, 20)	(0, 7, 7, 2, 10, 12)
Arco entrante	(1,3)	(2,4)
ϑ^+, ϑ^-	8 , 2	6 , 1
Arco uscente	(1,4)	(4,3)

Esercizio 4. Si consideri la rete definita nell'esercizio 3. Si dica se il problema di flusso di costo minimo ammette una soluzione di base $\bar{x}$ tale che $\bar{x}_{12} = 0, \bar{x}_{13} = 2, \bar{x}_{14} = 4, \bar{x}_{24} = 6$, studiandone, eventualmente, l'ammissibilitá e la degenerazione.

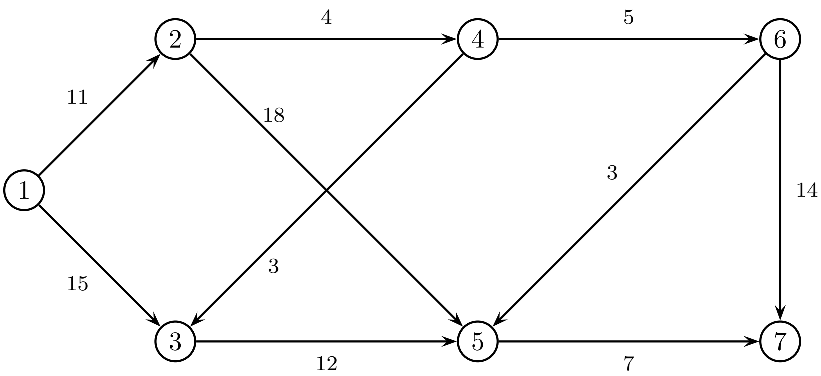
Una soluzione di base che soddisfa le condizioni richieste e' $\bar{x} = (0, 2, 4, 6, 1, 5, 0, 8, 0, 5)$.

$\bar{x}$ e' una soluzione di base, in quanto esiste una tripartizione (T, L, U), dell'insieme degli archi, che la genera, ove T sia un albero di copertura per la rete data, L un sottoinsieme di archi a capacitá nulla ed U un sottoinsieme di archi saturi. La tripartizione associata é le seguente:

$T = \{(1,3), (2,4), (2,5), (3,6), (5,6)\}, L = \{(1,2), (4,3), (4,6)\}, U = \{(1,4), (4,5)\}$;

La soluzione $\bar{x}$ é non degenere, non essendo presenti in T archi a flusso nullo o saturi. $\bar{x}$ non é ammissibile in quanto non soddisfa i i vincoli di capacitá sugli archi.

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



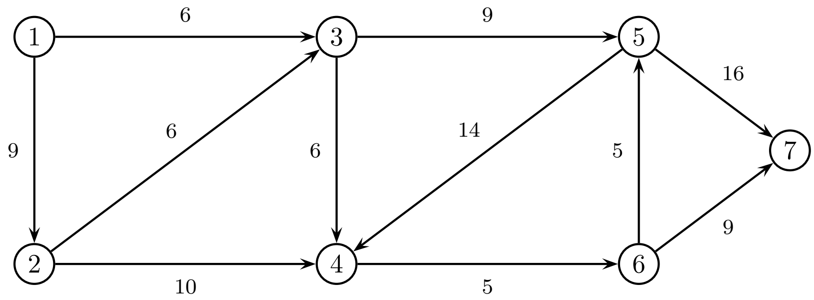
a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		3		4		6		5		7	
nodo 2	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1
nodo 3	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1
nodo 4	$+\infty$	-1	15	2	15	2	15	2	15	2	15	2	15	2
nodo 5	$+\infty$	-1	29	2	27	3	27	3	23	6	23	6	23	6
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	20	4	20	4	20	4	20	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	34	6	30	5	30	5
insieme Q	2, 3		3, 4, 5		4, 5		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

(b) Si aggiunga alla rete l'arco (5,4) con costo $k \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di k il problema della determinazione dell'albero dei cammini minimi di radice 1 ammette ottimo finito.

Aggiungendo alla rete l'arco (5,4) con costo $k \in \mathbb{R}$, si generano i cicli orientati $(5, 4, 3, 5)$ e $(5, 4, 6, 5)$ di costo $k+15$ e $k+8$, rispettivamente. Non dovendo esistere cicli orientati di costo negativo, affinche' il problema della determinazione dell'albero dei cammini minimi ammetta ottimo finito deve essere $k \geq -8$.

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla rete:



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 6, 0, 0)	6
1 -2- 3 - 5 - 7	3	(3, 6, 3, 0, 0, 9, 0, 0, 9, 0, 0)	9
1 - 2 - 4 - 6 - 7	5	(8, 6, 3, 5, 0, 9, 5, 0, 9, 0, 5)	14

Taglio di capacitá minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$	$N_t = \{5, 6, 7\}$

(b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco $(5, 7)$. Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

Un taglio di capacitá minima contenente l'arco $(5, 7)$ é $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $N_t = \{6, 7\}$ di capacitá $5 + k$ mentre un taglio di capacitá minima non contenente l'arco $(5, 7)$ é $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$ $N_t = \{5, 6, 7\}$ dato dall'algoritmo di Edmonds-Karp e di capacitá 14. Pertanto, per $k \geq 9$ il flusso massimo della rete é 14, mentre per $0 < k \leq 9$ il flusso massimo é $5 + k$.