Esame di Ricerca Operativa del 20/02/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. (a) Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso duale il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{1,3}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

(b) Determinare il problema ausiliario associato al problema definito in (a).

(c) Determinare una soluzione ottima del problema duale associato al problema primale definito in (a) e discutere l'unicitá delle soluzioni ottime del primale e del duale.

Esercizio 2. Un mobilificio produce quattro tipi di armadi $A1, A2, A3, A4$, ciascuno dei quali deve essere lavorato a macchina, rifinito e montato. I tempi di lavorazione (in ore) per ciascun armadio sono i seguenti:

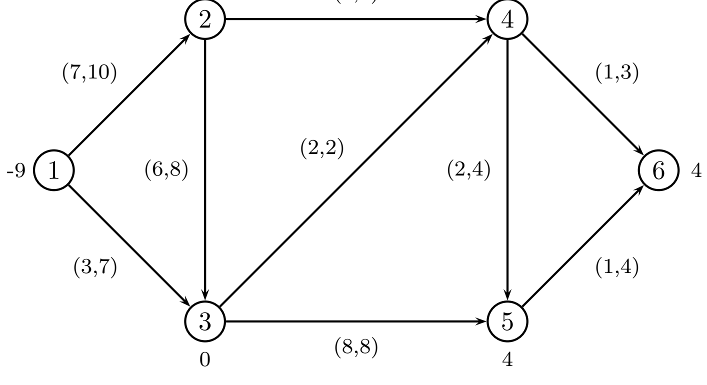
	Lavor. a macchina	Finitura	Montaggio
A1	4	1	2
A2	2	1	1
A3	2	2	2
A4	1	3	4

Il mobilificio dispone settimanalmente di 500 ore per la lavorazione a macchina, di 400 ore per la finitura e di 400 ore per il montaggio. I profitti unitari degli armadi $A1, .., A4$, sono 600, 400, 600 e 800 (Euro), rispettivamente. Il mobilificio ha un contratto con un distributore in base al quale, settimanalmente, la produzione degli armadi di tipo $A1$ deve essere almeno il 30% della produzione totale ed inoltre devono essere prodotti almeno 100 armadi di tipo $A2$ e $A3$ (in una qualsiasi combinazione). Si formuli un problema di programmazione lineare per determinare le quantitá di armadi di ciascun tipo che il mobilificio deve produrre settimanalmente per massimizzare il profitto complessivo.

variabili decisionali:

modello:

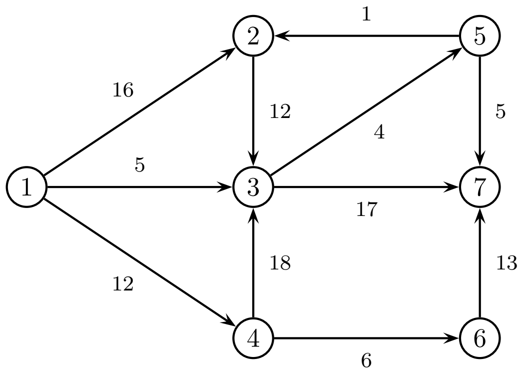
Esercizio 3. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,4) (3,5) (5,6)	
Archi di U	$\emptyset$	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

(b) Discutere la degenerazione della soluzione π determinata alla prima iterazione.

Esercizio 4. (a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

(b) Sia $k \in \mathbb{R}$ il costo dell'arco $(3, 5)$. Determinare, in funzione di k, il cammino di costo minimo dal nodo 1 al nodo 7.

Esercizio 5. (a) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla rete definita nell'esercizio 4 ove i valori indicati sugli archi indichino le relative capacitá.

cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

(b) Si determini una soluzione ottima del problema duale associato al problema del massimo flusso definito in (a).

SOLUZIONI

Esercizio 1. (a) Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso duale il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{1,3}	(0,0,1,0)	$(\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$	1	0	2
Iterazione 2	{2,3}	(0,0,1,0)	$(\frac{9}{2}, \frac{2}{5})$	3	5	4
Iterazione 3	{2,4}	(0,3,0,5)	$(-3, -2)$			
Iterazione 4						

(b) Determinare il problema ausiliario associato al problema definito in (a).

$$\begin{cases} \min\ \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + \epsilon_1 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + \epsilon_2 = 1 \\ x \geq 0,\ \epsilon \geq 0. \end{cases}$$

(c) Le soluzioni ottime del problema duale e del problema primale sono $y = (-3, -2)$ e $x = (0, 3, 0, 5)$, rispettivamente, e sono uniche essendo entrambe non degeneri.

Esercizio 2.

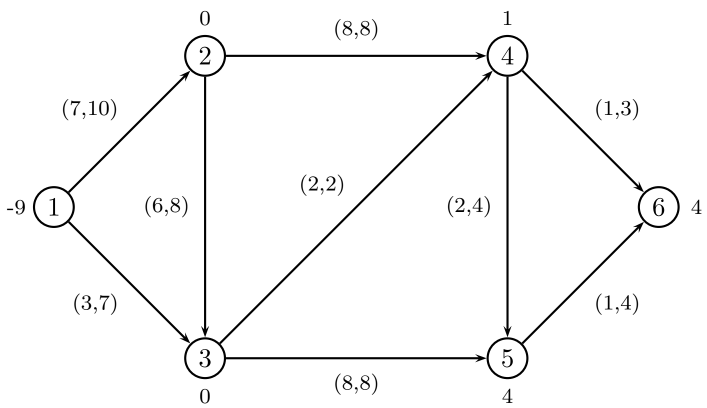
Variabili decisionali:

x_i = armadi di tipo Ai prodotti settimanalmente, $i = 1, 2, 3, 4$;

Modello:

$$\begin{cases} \max\ 600x_1 + 400x_2 + 600x_3 + 800x_4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 500 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 400 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 400 \\ x_1 \geq 0.3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 + x_3 \geq 100 \\ x_i \geq 0,\ x_i \in \mathbb{Z}\ i = 1, ..4. \end{cases}$$

Esercizio 3. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).

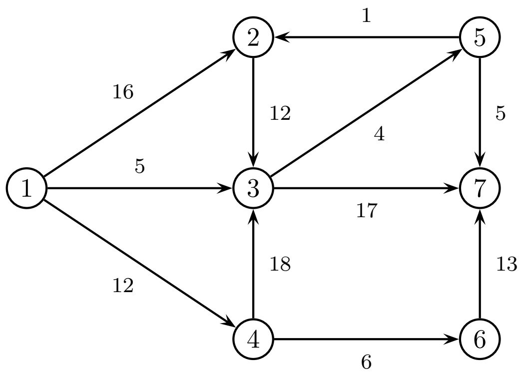


	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,4) (3,5) (5,6)	(1,2) (2,3) (2,4) (3,5) (5,6)
Archi di U	$\emptyset$	(1,3)
x	(9, 0, 8, 1, 0, 8, 0, 0, 4)	(2, 7, 1, 1, 0, 8, 0, 0, 4)
π	(0, 7, 13, 15, 21, 22)	(0, 7, 13, 15, 21, 22)
Arco entrante	(1,3)	(4,5)
ϑ^+, ϑ^-	7 , 8	4 , 1
Arco uscente	(1,3)	(2,3)

(b) Discutere la degenerazione della soluzione π determinata alla prima iterazione.

La soluzione é degenere essendo il costo ridotto $\bar{c}_{ij} := c_{ij} + \pi_i - \pi_j = 0$ per l'arco $(i,j) = (3,4)$.

Esercizio 4. (a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		5		2		4		7		6	
nodo 2	16	1	16	1	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5
nodo 3	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
nodo 4	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 5	$+\infty$	-1	9	3	9	3	9	3	9	3	9	3	9	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	18	4	18	4	18	4
nodo 7	$+\infty$	-1	22	3	14	5	14	5	14	5	14	5	14	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 4, 5,7		2, 4, 7		4, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

(b) Sia $k \in \mathbb{R}$ il costo dell'arco $(3,5)$. Determinare, in funzione di k, il cammino di costo minimo dal nodo 1 al nodo 7.

Osserviamo che l'arco $(3,5)$ fa parte del ciclo orientato $2-3-5$ che ha costo $k+13$, pertanto deve essere $k \geq -13$ in quanto non devono esistere cicli di costo negativo affinche' il problema ammetta soluzione ottima.

Il cammino di costo minimo dal nodo 1 al nodo 7 contentente l'arco $(3,5)$ e' 1-3-5-7 di costo 10+k mentre il cammino di costo minimo dal nodo 1 al nodo 7 non contentente l'arco $(3,5)$ e' 1-3-7 di costo 22. pertanto per $-13 \leq k \leq 12$ Il cammino di costo minimo dal nodo 1 al nodo 7 e' 1-3-5-7, mentre per $k \geq 12$ il cammino di costo minimo e' 1-3-7.

Esercizio 5. (a) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla rete definita nell'esercizio 4 ove i valori indicati sugli archi indichino le relative capacitá.

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	5	(0, 5, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0,0)	5
1 - 2 - 3 - 7	12	(12, 5, 0, 12, 0, 17, 0, 0, 0, 0, 0)	17
1 - 4 - 6 - 7	6	(12, 5, 6, 12, 0, 17, 0, 6, 0, 0, 6)	23
1 - 4 - 3 - 5 - 7	4	(12, 5, 10, 12, 4, 17, 4, 6, 0, 4, 6)	27

Taglio di capacitá minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad N_t = \{5, 6, 7\}$

(b) Si determini una soluzione ottima del problema duale associato al problema del massimo flusso definito in (a).

Una soluzione ottima del problema duale é (π, μ) ove:

$$\pi_i = \begin{cases} 0, \ i \in N_s \\ 1 \ i \in N_t \end{cases} \quad , \ i = 1, .., 7, \quad \mu_{ij} = \begin{cases} 1, \ se \ i \in N_s \ e \ \ j \in N_t \\ 0 \ altrimenti \end{cases} \quad , \ (i, j) \in A,$$

ove A e' l'insieme degli archi della rete e (N_s, N_t) é un taglio di capacitá minima.