Esame di Ricerca Operativa del 20/04/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. a) Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -x_1 - 2\ x_2 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_2 \leq -4 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{1,3}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

b) Si formuli il problema duale associato al problema definito al punto a). Se ne determini una soluzione ottima discutendone l'unicitá.

Esercizio 2. Due supermercati S_1 e S_2, di proprieta' di una stessa azienda, richiedono mensilmente 20 e 40 ettolitri di vino per la vendita. Il vino viene fornito da tre cantine C_1, C_2, C_3, ciascuna delle quali puo' fornire una quantità massima di vino pari a 20, 30 e 40 ettolitri, rispettivamente. Nella seguente tabella sono riportati i costi di trasporto (in euro per ettolitro) del vino, dalla cantina C_i al supermercato S_j, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$.

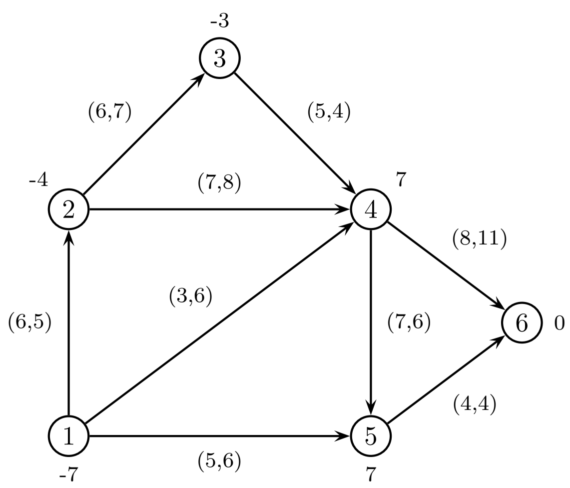
	S_1	S_2
C_1	10	8
C_2	6	12
C_3	14	10

Sapendo che il supermercato S_2 deve acquisire dalla cantina C_3, almeno il 50% del vino acquisito complessivamente dalle cantine C_1 e C_2, si formuli un problema di programmazione lineare per minimizzare il costo complessivo mensile di rifornimento del vino richiesto dai due supermercati.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 3. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

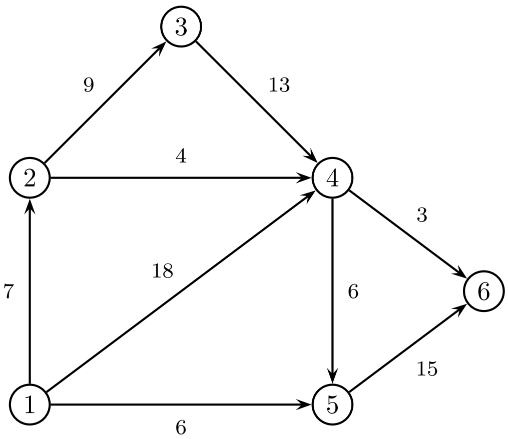


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,5) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6)	(2,3)	$x =$		
(1,5) (2,3) (2,4) (4,5) (5,6)	(3,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 4. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

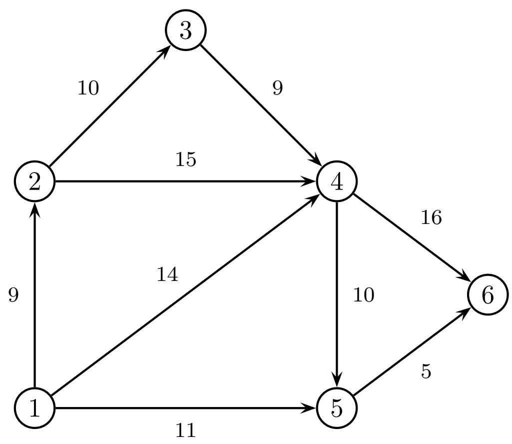
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,5) (3,4) (4,5) (4,6)	
Archi di U	(2,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 5. Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato												
nodo 2												
nodo 3												
nodo 4												
nodo 5												
nodo 6												
insieme Q												

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

b) Formulare matematicamente il problema definito al punto a).

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -x_1 - 2\ x_2 \\ -2\ x_1 - x_2 \le 4 \\ -x_1 - x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le -7 \\ x_1 - x_2 \le 12 \\ x_2 \le -4 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
iterazione 1	$\{1,\ 3\}$	$(1,\ -6)$	$(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0)$	3	$3,\ 5,$	2
iterazione 2	$\{1,\ 2\}$	$(2,\ -8)$	$(-1,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0)$	1	1	4
iterazione 3	$\{2,\ 4\}$	$(3,\ -9)$	$\left(0,\ \frac{3}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$			

b) Il problema duale associato al problema definito al punto a) é:

$$\begin{cases} \min\ 4y_1 + 6y_2 - 7y_3 + 12y_4 - 4y_5 \\ -2y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \quad = -1 \\ -y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 = -2 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Una soluzione ottima del problema duale é $\left(0,\ \frac{3}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ ed é unica essendo la soluzione ottima del problema primale $(3,\ -9)$ non degenere.

Esercizio 2.

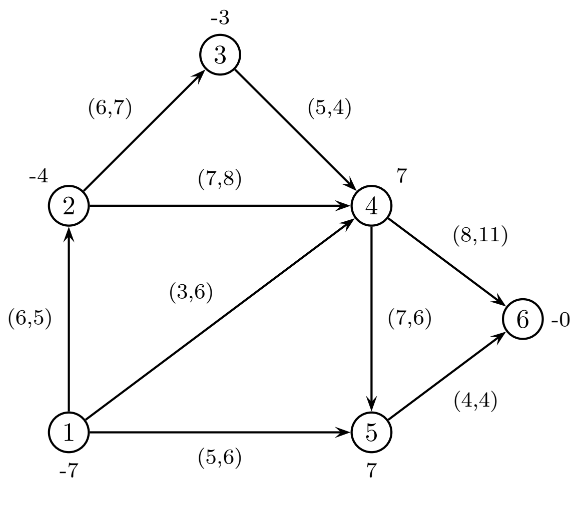
Variabili decisionali:

x_{ij} = quantitá (in ettolitri) di vino da trasferire mensilmente dalla cantina C_i al supermercato S_j, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$;

Modello:

$$\begin{cases} \min\ 10x_{11} + 8x_{12} + 6x_{21} + 12x_{22} + 14x_{31} + 10x_{32} \\ x_{11} + x_{12} \le 20 \\ x_{21} + x_{22} \le 30 \\ x_{31} + x_{32} \le 40 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40 \\ x_{12} + x_{22} - 2x_{32} \le 0 \\ x_{ij} \ge 0,\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2 \end{cases}$$

Esercizio 3. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

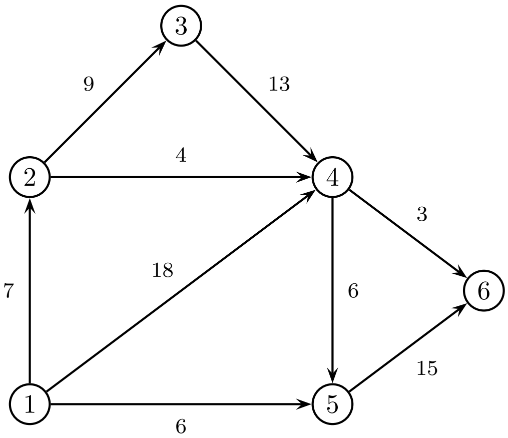


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,5) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6)	(2,3)	$x = (0,\ 0,\ 7,\ 7,\ -3,\ 10,\ 0,\ 0,\ 0)$	NO	SI
(1,5) (2,3) (2,4) (4,5) (5,6)	(3,4)	$\pi = (0,\ -9,\ -3,\ -2,\ 5,\ 9)$	NO	NO

Esercizio 4. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

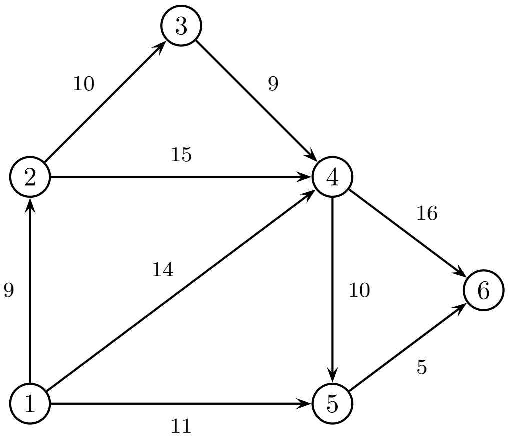
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,5) (3,4) (4,5) (4,6)	(1,2) (2,4) (3,4) (4,5) (4,6)
Archi di U	(2,4)	(1,5)
x	(4, 0, 3, 0, 8, 3, 4, 0, 0)	(1, 0, 6, 0, 5, 3, 1, 0, 0)
π	$(0,\ 6,\ -7,\ -2,\ 5,\ 6)$	(0, 6, 8, 13, 20, 21)
Arco entrante	(2,4)	(1,4)
ϑ^+, ϑ^-	3 , 4	6 , 1
Arco uscente	(1,5)	(1,2)

Esercizio 5. Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		5		2		4		6		3	
nodo 2	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1
nodo 3	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	16	2	16	2	16	2	16	2
nodo 4	18	1	18	1	11	2	11	2	11	2	11	2
nodo 5	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 6	$+\infty$	-1	21	5	21	5	14	4	14	4	14	4
insieme Q	2, 4, 5		2, 4, 6		3, 4, 6		3, 6		3		$\emptyset$	

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 4 - 6	14	(0, 14, 0, 0, 0, 0, 0, 14, 0)	14
1 - 5 - 6	5	(0, 14, 5, 0, 0, 0, 0, 14, 5)	19
1 - 2 - 4 - 6	2	(2, 14, 5, 0, 2, 0, 0, 16, 5)	21

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad N_t = \{6\}$

b) La formulazione matematica del problema definito al punto a) é:

$$\begin{cases} \max \quad v \\ Ex = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \\ 0 \leq x \leq u \end{cases}$$

ove

$$E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$u^\top = (9, 14, 11, 10, 15, 9, 10, 16, 5), \quad x \in \mathbb{R}^9, \quad v \in \mathbb{R}.$