Esame di Ricerca Operativa del 20/07/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. (a) Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -6\ x_1 + 5\ x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq 0 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 20 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{1,2}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

(b) Dire se $x = (-1, -2)$ e' una soluzione di base per il problema precedente. Motivare la risposta.

(c) Determinare una soluzione ottima del problema duale associato al problema definito in (a) e discuterne l'unicitá.

Esercizio 2. L'autista di un taxi puo' trasportare al massimo 4 persone richiedendo a ciascuna 3 Euro a km per il viaggio. Fanno richiesta di trasporto 6 persone ($P_1, ..., P_6$) ciascuna delle quali ha un bagaglio il cui peso (in kg) é indicato nella seguente tabella insieme al numero di chilometri (km) che la persona deve percorrere nel suo viaggio:

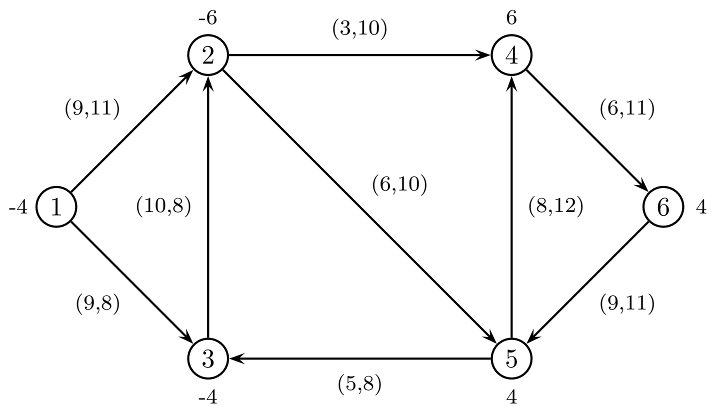
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
Peso bagaglio	6	8	15	16	14	7
km di viaggio	10	7	12	15	20	10

Sapendo che il peso massimo dei bagagli trasportabili dal taxi é 70 kg e che la persona P_3 deve viaggiare necessariamente con la persona P_1, si scriva un problema di programmazione lineare intera per determinare quali persone il tassista deve trasportare per massimizzare il profitto complessivo.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 3. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).

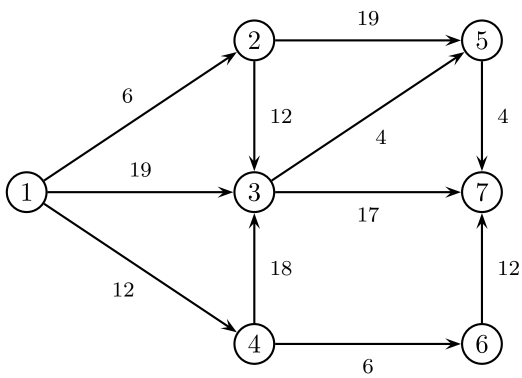


	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,2) (2,5) (3,2) (4,6) (6,5)	
Archi di U	(2,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

(b) Discutere la degenerazione della soluzione x determinata alla seconda iterazione.

(c) Discutere la degenerazione della soluzione π determinata alla seconda iterazione.

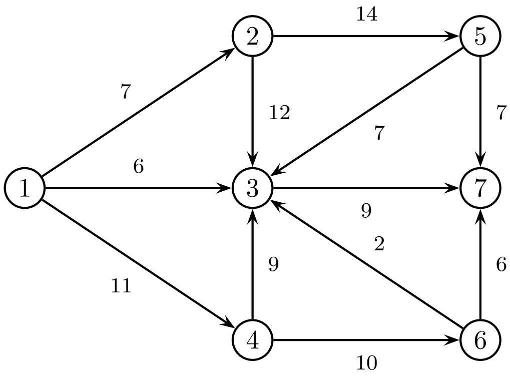
Esercizio 4. (a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla rete:



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

(b) Formulare il problema duale associato al problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1 definito al punto (a) e determinarne una soluzione ottima.

Esercizio 5. Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

(b) Determinare la capacitá del taglio: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$, $N_t = \{4, 6, 7\}$ e discuterne l'ottimalitá.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -6\ x_1 + 5\ x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq 0 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 20 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	$\{1,\ 2\}$	$(0,\ 0)$	$\left(\frac{17}{3},\ -\frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)$	2	4 9	5
Iterazione 2	$\{1,\ 5\}$	$\left(-\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$	$\left(\frac{16}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$			

(b) La soluzione $(-1, -2)$ non é di base, in quanto aderisce al solo vincolo 5.
(c) La soluzione ottima del problema duale é $\left(\frac{16}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$ ed é unica essendo la soluzione ottima del primale $\left(-\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$ non degenere.

Esercizio 2.

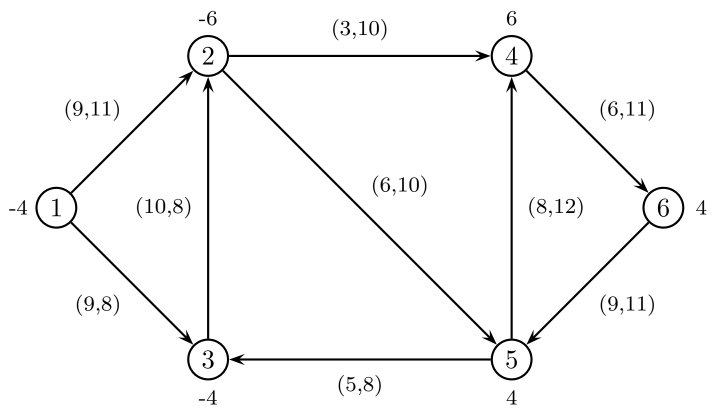
Variabili decisionali:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se il tassista trasporta la persona } P_i \\ 0, & \text{altriment}i \end{cases} \qquad i = 1, 2, .., 6.$$

Modello:

$$\begin{cases} \max\ (30x_1 + 21x_2 + 36x_3 + 45x_4 + 60x_5 + 30x_6) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 4 \\ 6x_1 + 8x_2 + 15x_3 + 16x_4 + 14x_5 + 7x_6 \leq 70 \\ x_1 = x_3 \\ x_i \in \{0, 1\},\ i = 1, ..., 6 \end{cases}$$

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete.



	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,2) (2,5) (3,2) (4,6) (6,5)	(1,2) (2,4) (2,5) (3,2) (4,6)
Archi di U	(2,4)	$\emptyset$
x	(4, 0, 10, 4, 4, 4, 0, 0, 0)	(4, 0, 10, 4, 4, 4, 0, 0, 0)
π	$(0,\ 9,\ -1,\ 0,\ 15,\ 6)$	$(0, 9, -1, 12, 15, 18)$
Arco entrante	(2,4)	
$\vartheta^+,\ \vartheta^-$	6 , 0	
Arco uscente	(6,5)	

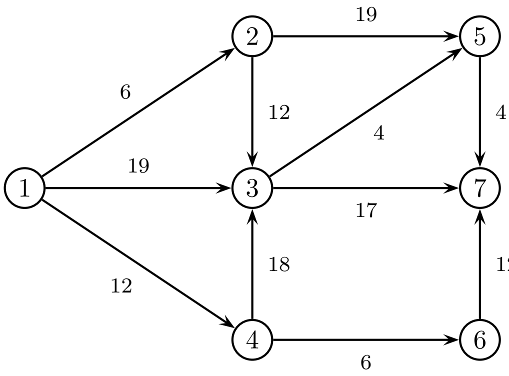
(b) Discutere la degenerazione della soluzione x determinata alla seconda iterazione.

La soluzione é degenere essendo il flusso dell'arco $(2,4)$ pari alla sua capacitá ossia $x_{24} = 10$.

(c) Discutere la degenerazione della soluzione π determinata alla seconda iterazione.

La soluzione é non degenere essendo tutti i costi ridotti $\bar{c}_{ij} := c_{ij} + \pi_i - \pi_j \neq 0$ per ogni arco in L ed in U.

Esercizio 4. (a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		3		6		5		7	
nodo 2	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 3	19	1	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2
nodo 4	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 5	$+\infty$	-1	25	2	25	2	22	3	22	3	22	3	22	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	18	4	18	4	18	4	18	4	18	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	35	3	31	6	26	5	26	5
insieme Q	2, 3, 4		3, 4, 5		3, 5, 6		5, 6, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

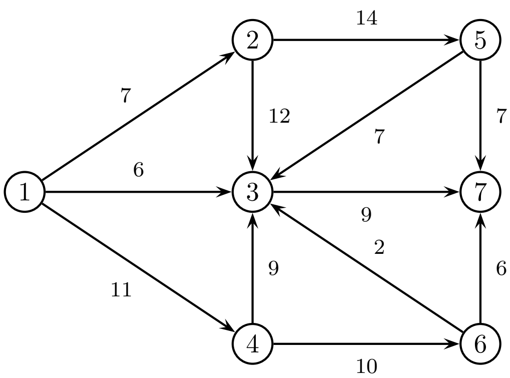
(b) Il problema duale associato al problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1 é:

$$\begin{cases} \max \ \sum_{i=2}^{7} (\pi_i - \pi_1) \\ -\pi_i + \pi_j \leq c_{ij}, \quad (i,j) \in A \end{cases}$$

ove $A = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,5),(3,5),(3,7),(4,3),(4,6),(5,7),(6,7)\}$, $c^T = (6,9,12,12,19,4,17,18,6,4,12)$.

Una soluzione ottima del problema duale associato al problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi é: $\pi = (0,6,18,12,22,18,26)$.

Esercizio 5. (a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 0)	6
1 - 2 - 3 - 7	3	(3, 6, 0, 3, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0, 0)	9
1 - 2 - 5 - 7	4	(7, 6, 0, 3, 4, 9, 0, 0, 0, 4, 0, 0)	13
1 - 4 - 6 - 7	6	(7, 6, 6, 3, 4, 9, 0, 6, 0, 4, 0, 6)	19
1 - 4 - 3 - 2 - 5 - 7	3	(7, 6, 9, 0, 7, 9, 3, 6, 0, 7, 0, 6)	22

Taglio di capacitá minima: $N_s = \{1, 3, 4, 6\}$ $\quad N_t = \{2, 5, 7\}$

(b) Determinare la capacitá del taglio: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$ e discuterne l'ottimalitá.
La capacitá del taglio é data da: $u_{14} + u_{37} + u_{57} = 11 + 9 + 7 = 27$.
Il taglio non é ottimo essendo la sua capacitá superiore al flusso massimo della rete pari a 22.