Esame di Ricerca Operativa del 21/02/2020

______________________ ______________________ ______________________

(Cognome) **(Nome)** **(Numero di Matricola)**

Esercizio 1. a) Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il seguente problema di programmazione lineare (P):

$$\begin{cases} \max \ x_1 + 2\ x_2 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 20 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{4,5}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

b) Discutere l'unicitá e la degenerazione della soluzione ottima del problema determinata al punto a).

c) Si elimini dal problema (P) il primo vincolo $-2\ x_1 - x_2 \leq 4$.
Determinare una soluzione ottima del nuovo problema cosi' ottenuto e del problema duale ad esso associato.

Esercizio 2. a) Un'azienda produce 4 modelli di lavatrici L_1, L_2 e L_3 ed L_4 in 2 stabilimenti S_1 ed S_2.
L' azienda dispone di 10 operai in S_1 e di 6 operai in S_2 ciascuno dei quali lavora per 8 ore al giorno per 5 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre le lavatrici in ciascun stabilimento e le richieste minime di produzione da soddisfare per ciascun modello sono indicate nella seguente tabella:

	L_1	L_2	L_3	L_4
S_1	1	1.2	1.4	2
S_2	1.2	1.3	1.5	2
Richiesta	50	30	60	40

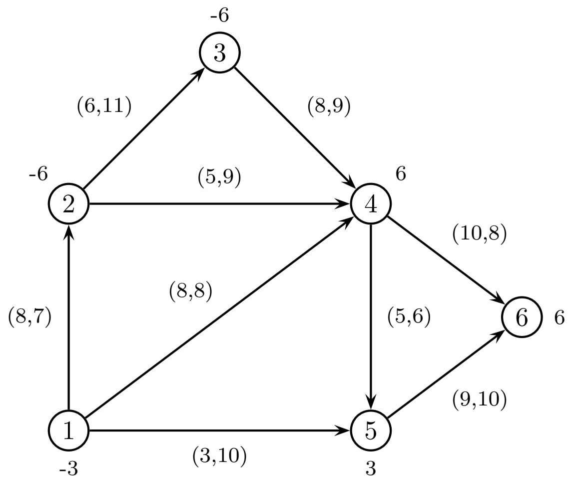
Sapendo che i 4 modelli di lavatrici vengono venduti ad un prezzo di 300, 400 , 500 e 800 euro, rispettivamente, si formuli un problema di programmazione lineare per determinare quante lavatrici di ciascun modello produrre settimanalmente nei due stabilimenti in modo da massimizzare il profitto complessivo di vendita.

Variabili decisionali:

Modello:

b) Si dimostri che il problema definito al punto a) ammette ottimo finito.

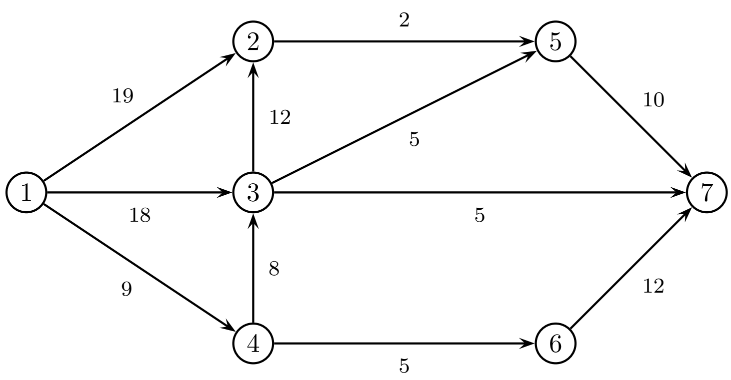
Esercizio 3. a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,4) (4,5) (4,6)	
Archi di U	(3,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

b) Formulare esplicitamente il problema duale associato al problema di flusso di costo minimo definito al punto a) e dire se esso ammette ottimo finito. Giustificare le risposte.

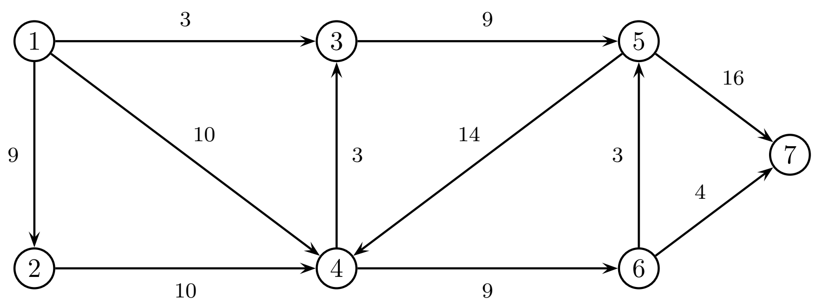
Esercizio 4. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla rete:



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Si consideri il problema di flusso di costo minimo che definisce il problema in a) e se ne determini una soluzione ottima.

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco (6,7). Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 2\ x_2 \\ -2\ x_1 - x_2 \le 4 \\ -x_1 - x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le -7 \\ x_1 - x_2 \le 12 \\ 3\ x_1 - x_2 \le 20 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
iterazione 1	$\{4, 5\}$	$(4,\ -8)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{7}{2},\ \frac{3}{2}\right)$	4	5	3
iterazione 2	$\{3, 5\}$	$\left(\frac{13}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$	$\left(0,\ 0,\ \frac{7}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\right)$			

b) La soluzione ottima e' non degenere. La soluzione ottima e' unica essendo la soluzione ottima del duale y determinata alla iterazione 2 non degenere.

c) Si elimini dal problema (P) il primo vincolo $-2\ x_1 - x_2 \le 4$.
Determinare una soluzione ottima del nuovo problema cosi' ottenuto e del problema duale ad esso associato.

La soluzione ottima del nuovo problema (che denotiamo con $\hat{P}$) coincide con quella determinata dall'algoritmo al punto a) ossia $\bar{x} = \left(\frac{13}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$. Infatti $\bar{x}$ e' una soluzione di base ammissibile per $\hat{P}$ associata alla base $B = \{2, 4\}$ e la soluzione di base complementare associata alla base B e' data da $\bar{y} = \left(\ 0,\ \frac{7}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\right)$. Essendo $\bar{y}$ ammissibile per il duale associato a $\hat{P}$, segue che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime di $\hat{P}$ e del problema duale ad esso associato.

Esercizio 2. Variabili decisionali:
Sia x_{ij} il numero di lavatrici L_j prodotte nello stabilimento S_i, $i = 1, 2,\quad j = 1, 2, 3, 4$.

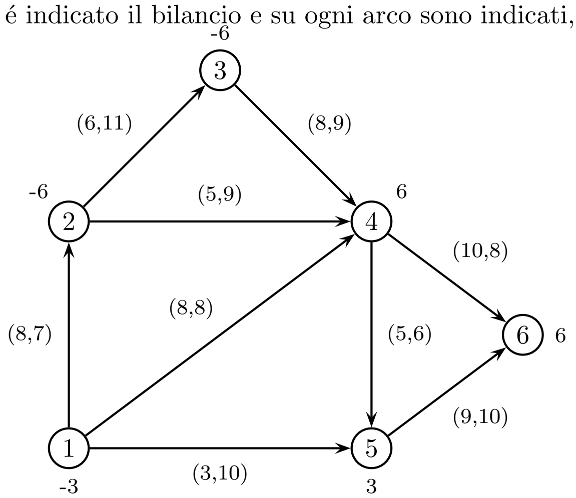
Modello:

$$\begin{cases} \max\ [300(x_{11} + x_{21}) + 400(x_{12} + x_{22}) + 500(x_{13} + x_{23}) + 800(x_{14} + x_{24})] \\ x_{11} + x_{21} \ge 50 \\ x_{12} + x_{22} \ge 30 \\ x_{13} + x_{23} \ge 60 \\ x_{14} + x_{24} \ge 40 \\ x_{11} + 1.2x_{12} + 1.4x_{13} + 2x_{14} \le 400 \\ 1.2x_{21} + 1.3x_{22} + 1.5x_{23} + 2x_{24} \le 240 \\ x_{ij} \ge 0, x_{ij} \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

b) Si dimostri che il problema definito al punto a) ammette ottimo finito.
E' facile provare che la regione ammissibile e' limitata per la presenza, ad esempio, del vincolo $x_{11}+1.2x_{12}+1.4x_{13}+2x_{14} \le 400$ ed essendo le variabili $x_{ij} \ge 0$. Inoltre la regione ammissibile e' non vuota, una soluzione ammissibile e' data da:

$$x_{11} = 50,\ x_{12} = 30,\ x_{13} = 60,\ x_{14} = 40, x_{21} = x_{22} = x_{23} = x_{24} = 0.$$

Esercizio 3. a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,4) (4,5) (4,6)	(1,4) (2,3) (2,4) (4,5) (4,6)
Archi di U	(3,4)	(3,4)
x	(3, 0, 0, 3, 6, 9, 3, 6, 0)	(0, 3, 0, 3, 3, 9, 3, 6, 0)
π	(0, 8, 14, 13, 18, 23)	(0, 3, 9, 8, 13, 18)
Arco entrante	(1,4)	(1,5)
ϑ^+, ϑ^-	8 , 3	10 , 3
Arco uscente	(1,2)	(1,4)

(b) Formulare esplicitamente il problema duale associato al problema di flusso di costo minimo definito al punto (a) e dire se esso ammette ottimo finito. Giustificare le risposte.

La formulazione matematica del problema duale associato al problema definito al punto a) é:

$$\begin{cases} \max \quad \pi^T b + \mu^T u \\ \pi^T E + \mu^T \leq c^T \\ \mu \leq 0 \end{cases}$$

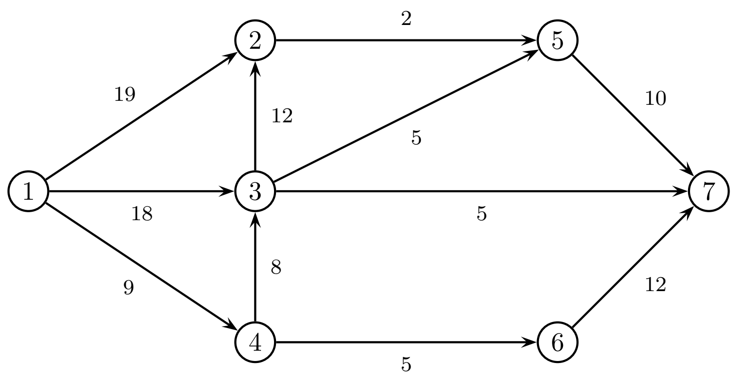
ove

$$E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ove $b^\top = (-3, -6, -6, 6, 3, 6)$, $c^\top = (8, 8, 3, 6, 5, 8, 5, 10, 9)$, $u^\top = (7, 8, 10, 11, 9, 9, 6, 8, 10)$, $\quad \mu \in \mathbb{R}^9, \pi \in \mathbb{R}^6$.

Tale problema ammette ottimo finito in quanto il problema (primale) di flusso di costo minimo ammette ottimo finito essendo la sua regione ammissibile non vuota e limitata.

Esercizio 4. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		6		3		2		5		7	
nodo 2	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1
nodo 3	18	1	17	4	17	4	17	4	17	4	17	4	17	4
nodo 4	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	22	3	21	2	21	2	21	2
nodo 6	$+\infty$	-1	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	6	22	3	22	3	22	3	22	3
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 3, 7		2, 5, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Si consideri il problema di flusso di costo minimo che definisce il problema in a) e se ne determini una soluzione ottima.

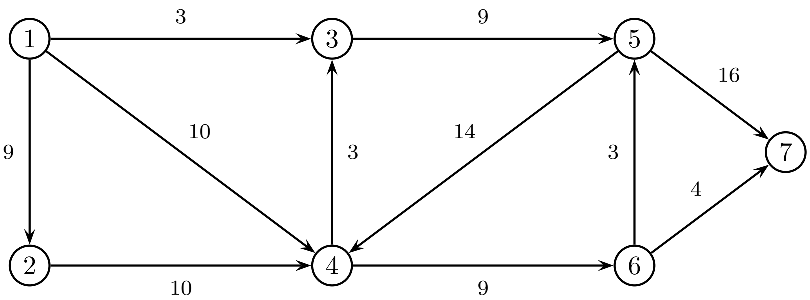
Il problema di flusso di costo minimo che definisce il problema in a) é dato da

$$\begin{cases} \min \ c^T x \\ Ex = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ove E e' la matrice di incidenza del grafo, $b^\top = (-6, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $c^\top = (19, 18, 9, 2, 12, 5, 5, 8, 5, 10, 12)$, $\quad x \in \mathbb{R}^{11}$,

Una soluzione ottima di tale problema é: $\bar{x}^\top = (2, 0, 4, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0)$.

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 -5- 7	3	(0, 3, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 3, 0, 0)	3
1 - 4 - 6 - 7	4	(0, 3, 4, 0, 3, 0, 4, 0, 3, 0, 4)	7
1 - 4 -3- 5 - 7	3	(0, 3, 7, 0, 6, 3, 4, 0, 6, 0, 4)	10
1 - 4 -6- 5 - 7	3	(0, 3, 10, 0, 6, 3, 7, 0, 9, 3, 4)	13

Taglio di capacitá minima: $N_s = \{1, 2, 4, 6\}$ $\quad N_t = \{3, 5, 7\}$

b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco (6,7). Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

Il taglio di capacitá minima contenente l'arco $(6, 7)$ é quello determinato dall'algoritmo ed ha capacitá $k+9$, mentre quello non contenente l'arco $(6, 7)$ é $N_s = \{1, 2, 4\}$ $\quad N_t = \{3, 5, 6, 7\}$ di capacitá 15. Il flusso massimo della rete è $k + 9$ per $0 < k \leq 6$ mentre è 15 per $k \geq 6$.