**Esame di Ricerca Operativa del 28/06/2019**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** a) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare mediante l'algoritmo del simplesso:

$$\begin{cases} \max\ 9\ x_1 + 8\ x_2 \\ -6\ x_1 + 10\ x_2 \leq 17 \\ -2\ x_1 + 2\ x_2 \leq 3 \\ 7\ x_1 + 2\ x_2 \leq 28 \\ 4\ x_1 - 3\ x_2 \leq 16 \\ -2\ x_1 - 4\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Iterazione 1 | {4,5} | | | | | |
| Iterazione 2 | | | | | | |
| Iterazione 3 | | | | | | |
| Iterazione 4 | | | | | | |

b) Si dica se la regione ammissibile del problema definito in a) é limitata. Giustificare la risposta.

c) Si consideri il problema di programmazione lineare ottenuto rimpiazzando il massimo (max) con il minimo (min) nel problema definito in a). Si dimostri che tale problema ammette ottimo finito e che il suo valore ottimo é strettamente negativo.

**Esercizio 2.** Un'azienda agricola produce settimanalmente 4 ettolitri di olio (O) e 6 ettolitri di vino (V) che vengono venduti all'ingrosso (I) e al dettaglio (D) ai seguenti prezzi di vendita in euro al litro:

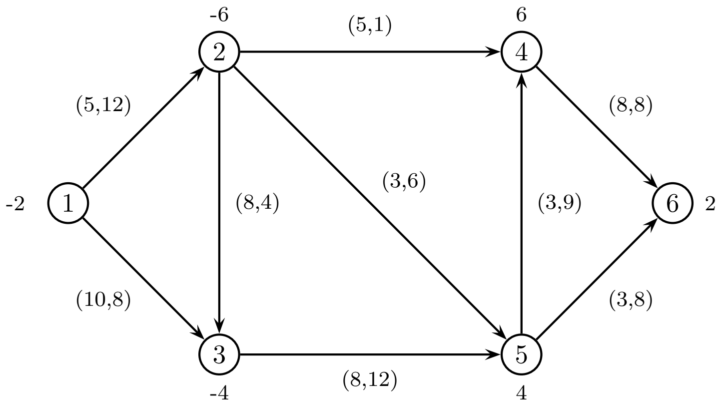
| | $I$ | $D$ |
|---|---|---|
| $O$ | 3 | 4 |
| $V$ | 2 | 3 |

Per ogni prodotto, la quantità venduta al dettaglio non puo' superare il 40% della quantità complessiva di vino ed olio venduta all'ingrosso. Inoltre, la vendita al dettaglio comporta la presenza di personale che viene stimata nella misura di 0.02h, (h=ore) per ogni litro di prodotto venduto. Sapendo che il personale addetto alla vendita e' disponibile settimanalmente al più per 40h, al costo di 9 euro/h, si formuli un problema di programmazione lineare per determinare la quantità di ciascun prodotto da vendere all'ingrosso e al dettaglio in modo da massimizzare il profitto settimanale di vendita.

variabili decisionali:

modello:

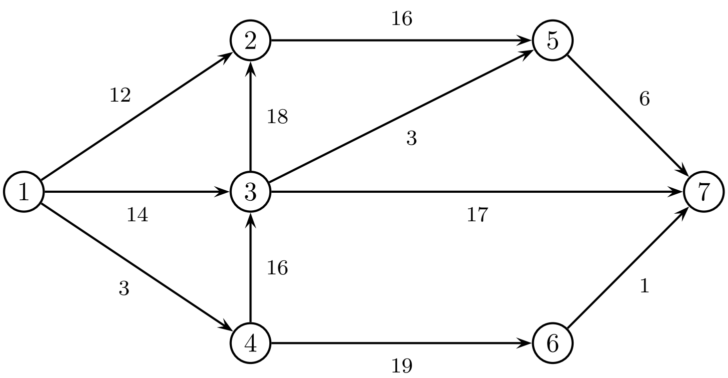
**Esercizio 3.** a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



| | Iterazione 1 | Iterazione 2 |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,3) (3,5) (4,6) (5,4) | |
| Archi di U | (2,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

b) Studiare la degenerazione delle soluzioni $x$ e $\pi$ determinate alla seconda iterazione.

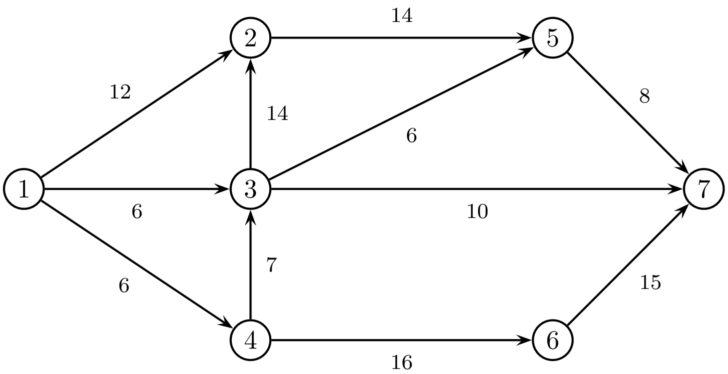
**Esercizio 4.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

(b) Discutere l'unicitá della soluzione del problema della determinazione dell'albero dei cammini minimi definito al punto a).

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

| | |
|---|---|
| Taglio di capacitá minima: $N_s =$ | $N_t =$ |

b) Dire per quali valori dei parametri reali $a, b, c$, la soluzione $\bar{x} = (1, 1, 1, a, b, c, 1, 0, 1, 1, 1)$ é ammissibile per il problema del massimo flusso definito in a). Giustificare la risposta.

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** a) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare mediante l'algoritmo del simplesso:

$$\begin{cases} \max\ 9\ x_1 + 8\ x_2 \\ -6\ x_1 + 10\ x_2 \leq 17 \\ -2\ x_1 + 2\ x_2 \leq 3 \\ 7\ x_1 + 2\ x_2 \leq 28 \\ 4\ x_1 - 3\ x_2 \leq 16 \\ -2\ x_1 - 4\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| iterazione 1 | $\{4,\ 5\}$ | $\left(\frac{5}{2},\ -2\right)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{10}{11},\ -\frac{59}{22}\right)$ | 5 | $52,\ 132,\ 11$ | 3 |
| iterazione 2 | $\{3,\ 4\}$ | $(4,\ 0)$ | $\left(0,\ 0,\ \frac{59}{29},\ -\frac{38}{29},\ 0\right)$ | 4 | $\frac{29}{2},\ \frac{319}{18}$ | 1 |
| iterazione 3 | $\{1,\ 3\}$ | $\left(3,\ \frac{7}{2}\right)$ | $\left(\frac{19}{41},\ 0,\ \frac{69}{41},\ 0,\ 0\right)$ | | | |

b) Si dica se la regione ammissibile del problema definito in a) é limitata. Giustificare la risposta.

Si puo' risolvere il problema graficamente o nella forma analitica come segue.

Sommando la seconda, quarta e quinta disequazione vincolare si ottiene la condizione $x_2 \geq -\frac{22}{5}$; sommando la seconda, terza e quinta disequazione vincolare si ottiene la condizione $x_1 \leq \frac{34}{3}$. Dalla seconda disequazione si ottiene, sfruttando le precedenti condizioni:

$$x_2 \leq \frac{3}{2} + x_1 \leq \frac{3}{2} + \frac{34}{3} = \frac{77}{6},$$

ed, inoltre

$$x_1 \geq x_2 - \frac{3}{2} \geq -\frac{22}{5} - \frac{3}{2} = -\frac{59}{10}.$$

Pertanto

$$-\frac{59}{10} \leq x_1 \leq \frac{34}{3}, \quad -\frac{22}{5} \leq x_2 \leq \frac{77}{6}$$

il che prova che la regione ammissibile del problema é limitata.

c) Si consideri il problema di programmazione lineare ottenuto rimpiazzando il massimo (max) con il minimo (min) nel problema definito in a). Si dimostri che tale problema ammette ottimo finito e che il suo valore ottimo é strettamente negativo.

Il problema ammette ottimo finito essendo la regione ammissibile limitata come dimostrato in b). Per provare che il valore ottimo e' strettamente negativo si consideri il generico punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, 0)$. E' facile vedere che tale punto é ammissibile per $-\frac{3}{2} \leq \bar{x}_1 \leq 4$, da cui segue che il valore ottimo del problema e' minore o uguale di $9 \cdot (-\frac{3}{2}) = -\frac{27}{2}$.

**Esercizio 2.**

Variabili decisionali:

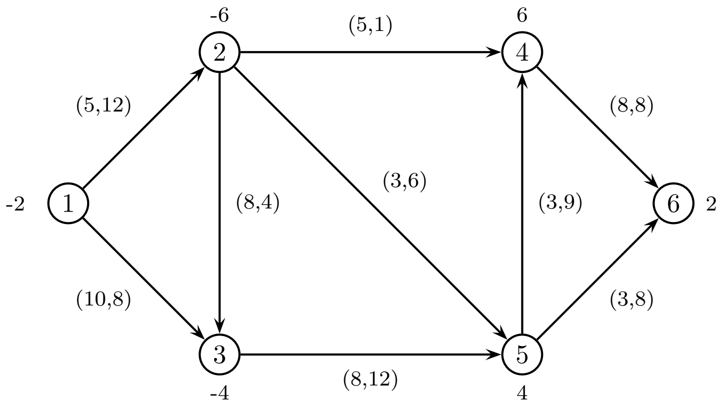
Si indichino con $i = 1, 2$, l'olio ed il vino rispettivamente, con $j = 1, 2$, la vendita all'ingrosso e al dettaglio, rispettivamente.

Sia $x_{ij}$ = la quantitá (in litri) di prodotto $i$ da vendere settimanalmente nella modalità $j$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$;

Modello:

$$\begin{cases} \max\ (3x_{11} + 4x_{12} + 2x_{21} + 3x_{22} - 0.18(x_{12} + x_{22})) \\ x_{11} + x_{12} = 400 \\ x_{21} + x_{22} = 600 \\ x_{12} \leq 0.4(x_{11} + x_{21}) \\ x_{22} \leq 0.4(x_{11} + x_{21}) \\ 0.02(x_{12} + x_{22}) \leq 40 \\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2,\ j = 1, 2 \end{cases}$$

**Esercizio 3.** a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

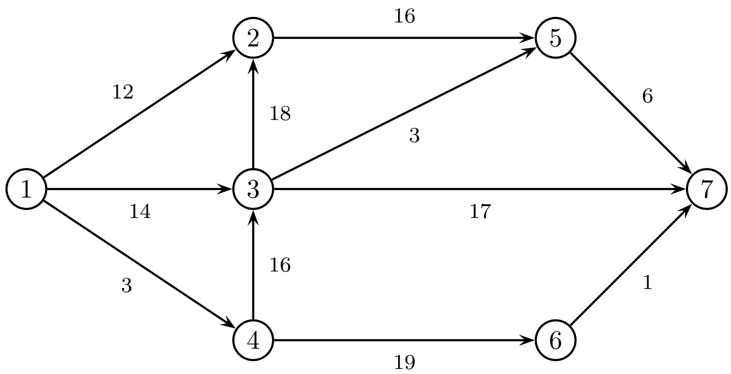



| | iterazione 1 | iterazione 2 |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,3) (3,5) (4,6) (5,4) | (1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4) |
| Archi di U | (2,5) | (2,5) |
| $x$ | (0, 2, 0, 0, 6, 6, 2, 8, 0) | (0, 2, 0, 0, 6, 6, 2, 8, 0) |
| $\pi$ | (0, 2, 10, 21, 18, 29) | (0, 16, 10, 21, 18, 29) |
| Arco entrante | (2,4) | (1,2) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 1 , 0 | 1 , 2 |
| Arco uscente | (2,3) | (2,4) |

b) Studiare la degenerazione delle soluzioni $x$ e $\pi$ determinate alla seconda iterazione.

La soluzione $x$ e' degenere essendo $x_{24} = 0$. La soluzione $\pi$ e' non degenere essendo i costi ridotti $\bar{c}_{ij} := c_{ij} + \pi_i - \pi_j \neq 0$, per ogni $(i, j) \notin T$.

**Esercizio 4.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.

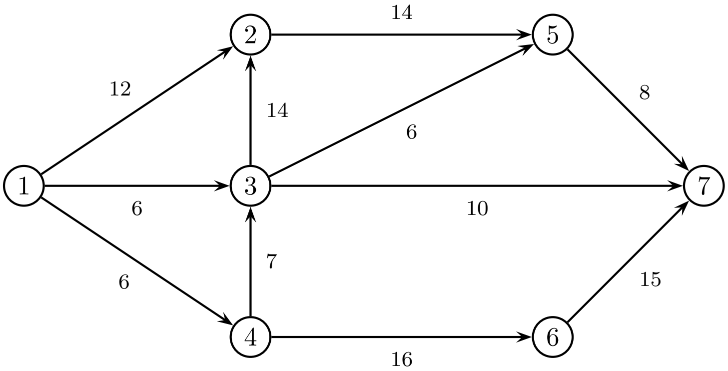



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 2 | | 3 | | 5 | | 6 | | 7 | |
| nodo 2 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 |
| nodo 3 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 |
| nodo 4 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 28 | 2 | 17 | 3 | 17 | 3 | 17 | 3 | 17 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 22 | 4 | 22 | 4 | 22 | 4 | 22 | 4 | 22 | 4 | 22 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 31 | 3 | 23 | 5 | 23 | $5^*$ | 23 | $5^*$ |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 3, 5, 6 | | 5, 6, 7 | | 6, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

(*) oppure 6.

(b) La soluzione del problema non é unica essendo il predecessore del nodo 7 uno qualsiasi dei nodi 5 o 6.

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 6 | (0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0) | 6 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 8 | (8, 6, 0, 8, 0, 0, 6, 0, 0, 8, 0) | 14 |
| 1 - 4 - 3 - 7 | 4 | (8, 6, 4, 8, 0, 0, 10, 4, 0, 8, 0) | 18 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 2 | (8, 6, 6, 8, 0, 0, 10, 4, 2, 8, 2) | 20 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 5\}$ $N_t = \{3, 4, 6, 7\}$

b) Dire per quali valori dei parametri reali $a, b, c$, la soluzione $\bar{x} = (1, 1, 1, a, b, c, 1, 0, 1, 1, 1)$ é ammissibile per il problema del massimo flusso definito in a).

La soluzione $\bar{x}$ soddisfa i vincoli di conservazione del flusso nei nodi 1,4,6,7, ed, inoltre, verifica i vincoli di capacitá sugli archi diversi da (2,5), (3,2), (3,5). Pertanto tale soluzione risulta ammissibile se é soddisfatto il seguente sistema, che rappresenta i vincoli di conservazione del flusso nei nodi 2,3,5 ed i vincoli di capacita' sugli achi (2,5), (3,2), (3,5):

$$\begin{cases} b + 1 = a \\ b + c = 0 \\ a + c = 1 \\ 0 \leq a \leq 14 \\ 0 \leq b \leq 14 \\ 0 \leq c \leq 6 \end{cases}$$

L'unica soluzione del precedente sistema é $a = 1, b = c = 0$.