Esame di Ricerca Operativa del 29/06/2018

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. a) Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 2\ x_2 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -5 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 20 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{2,4}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

b) Discutere l'unicitá e la degenerazione della soluzione ottima del problema determinata al punto a).

c) Dire se la soluzione $y^T = (3, 1, 0, 0, 0, 0)$ é ammissibile per il problema duale associato al problema definito al punto a).Giustificare la risposta.

Esercizio 2. Una dieta giornaliera consiste di tre cibi C_1, C_2 e C_3, che vengono assunti nella quantità complessiva di 800 grammi. I tre cibi contengono proteine, carboidrati e grassi nelle quantità percentuali indicate nella seguente tabella:

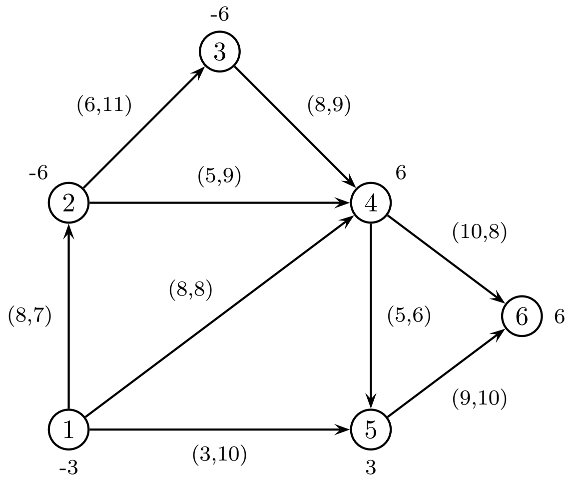
	proteine	carboidrati	grassi
C_1	25%	40%	20%
C_2	20%	40%	0
C_3	30%	0	30%

Si vuole che nella dieta vengano assunti giornalmente almeno 100 grammi di proteine, almeno 150 grammi di carboidrati ed almeno 100 grammi di grassi. Si vuole, inoltre, che la quantità di grassi non superi i 200 grammi e che la quantità complessiva dei cibi C_1 e C_2 sia almeno l'80% della quantità di C_3.
Sapendo che il costo per 100 grammi di ciascuno dei cibi C_1, C_2 e C_3, è 2, 0.4 e 1.5 euro, rispettivamente, si formuli un problema di programmazione lineare per determinare una dieta giornaliera di minimo costo.

Variabili decisionali:

Modello:

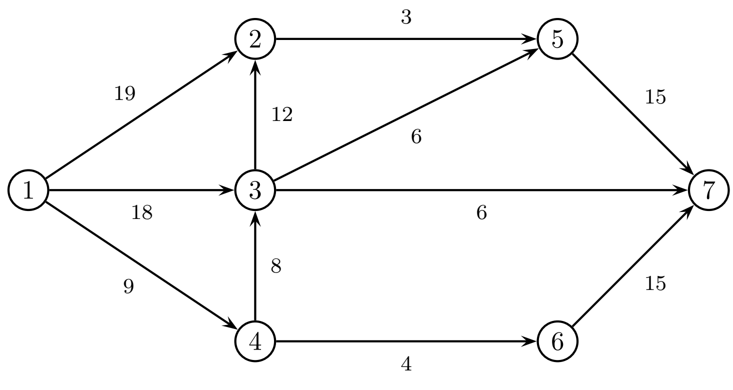
Esercizio 3. a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,4) (4,5) (4,6)	
Archi di U	(3,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^{+}, ϑ^{-}		
Arco uscente		

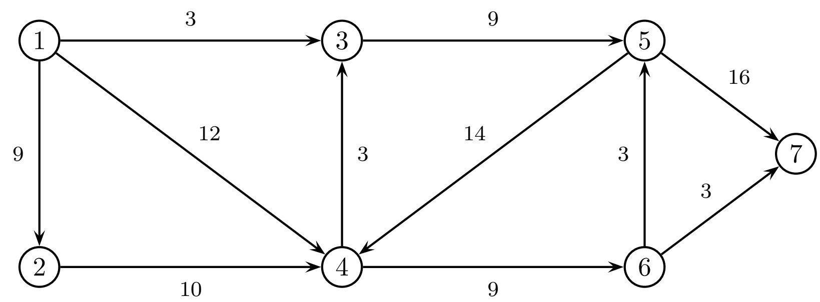
b) Formulare esplicitamente il problema di flusso di costo minimo definito al punto a) e determinare il rango della matrice di incidenza associata al grafo che definisce il problema.

Esercizio 4. Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco (1,3). Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 2\ x_2 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -5 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 20 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
iterazione 1	$\{2,\ 4\}$	$(3,\ -9)$	$\left(0,\ -\frac{3}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \right)$	2	$\frac{20}{3},\ 2$	6
iterazione 2	$\{4,\ 6\}$	$(4,\ -8)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{7}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\right)$	4	$5,\ 2$	5
iterazione 3	$\{5,\ 6\}$	$(5,\ -5)$	$(\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$		,	
iterazione 4						

b) La soluzione ottima e' non degenere. La soluzione ottima non e' unica essendo la soluzione ottima del duale y determinata alla iterazione 3 degenere ed essendo la soluzione ottima del primale (determinata dall'algoritmo) non degenere.

c) Il problema duale é:

$$\begin{cases} \min(4y_1 + 6y_2 - 7y_3 + 12y_4 - 5y_5 + 20y_6) \\ -2y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + y_5 + 3y_6 = 1 \\ -y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + 2y_5 - y_6 = 2 \end{cases}$$

La soluzione $y^T = (3, 1, 0, 0, 0, 0)$ non é ammissibile in quanto non soddisfa i vincoli di uguaglianza.

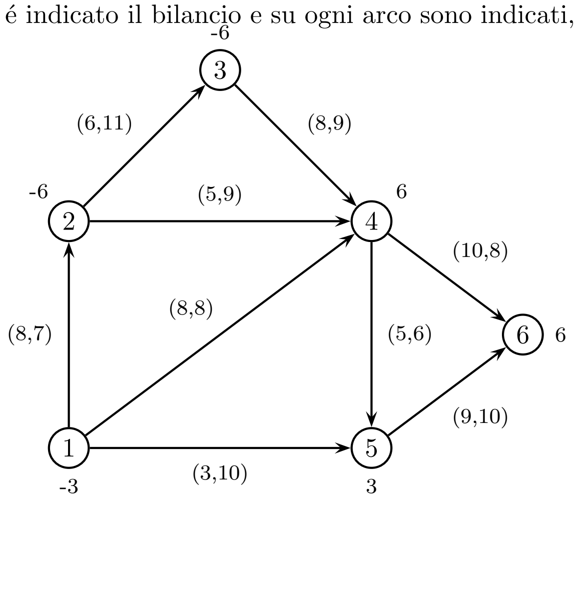
Esercizio 2. Variabili decisionali:

x_i = quantitá (in ettogrammi) di cibo C_i, $i = 1, 2, 3$, da assumere giornalmente nella dieta;

Modello:

$$\begin{cases} \min\ (2x_1 + 0.4x_2 + 1.5x_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 0.25x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \geq 1 \\ 0.4x_1 + 0.4x_2 \geq 1.5 \\ 0.2x_1 + 0.3x_3 \geq 1 \\ 0.2x_1 + 0.3x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 - 0.8x_3 \geq 0 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

Esercizio 3. a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,4) (4,5) (4,6)	(1,4) (2,3) (2,4) (4,5) (4,6)
Archi di U	(3,4)	(3,4)
x	(3, 0, 0, 3, 6, 9, 3, 6, 0)	(0, 3, 0, 3, 3, 9, 3, 6, 0)
π	(0, 8, 14, 13, 18, 23)	(0, 3, 9, 8, 13, 18)
Arco entrante	(1,4)	(1,5)
ϑ^+, ϑ^-	8 , 3	10 , 3
Arco uscente	(1,2)	(1,4)

b) b) La formulazione matematica del problema definito al punto a) é:

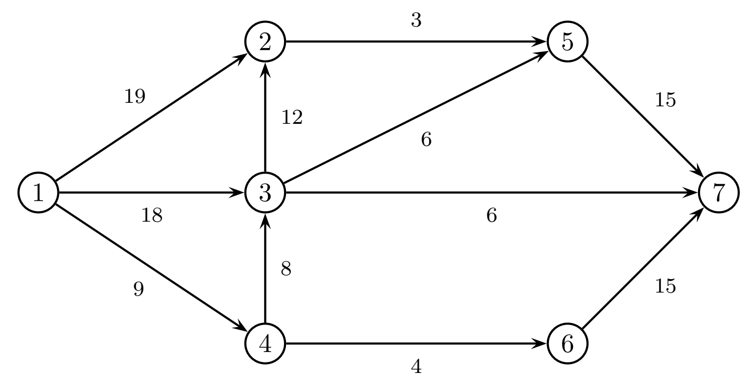
$$\begin{cases} \min \quad c^T x \\ Ex = b \\ 0 \le x \le u \end{cases}$$

ove

$$E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

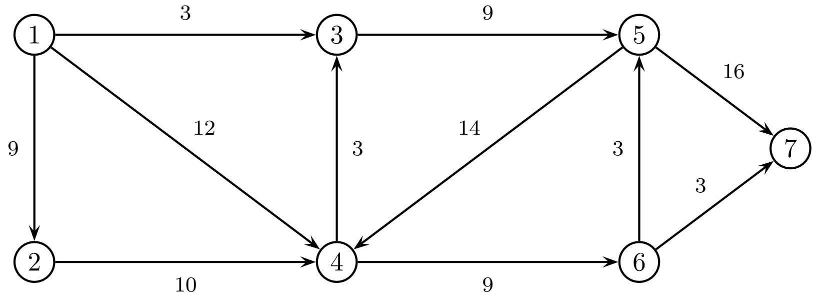
$b^\top = (-3, -6, -6, 6, 3, 6),\ c^\top = (8, 8, 3, 6, 5, 8, 5, 10, 9),\ u^\top = (7, 8, 10, 11, 9, 9, 6, 8, 10), \quad x \in \mathbb{R}^9.$
Il rango della matrice E é 5 essendo il grafo dato connesso e con 6 nodi.

Esercizio 4. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		6		3		2		5		7	
nodo 2	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1
nodo 3	18	1	17	4	17	4	17	4	17	4	17	4	17	4
nodo 4	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	23	3	22	2	22	2	22	2
nodo 6	$+\infty$	-1	13	4	13	4	13	4	13	4	13	4	13	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	28	6	23	3	23	3	23	3	23	3
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 3, 7		2, 5, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 -5- 7	3	(0, 3, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 3, 0, 0)	3
1 - 4 - 6 - 7	3	(0, 3, 3, 0, 3, 0, 3, 0, 3, 0, 3)	6
1 - 4 -3- 5 - 7	3	(0, 3, 6, 0, 6, 3, 3, 0, 6, 0, 3)	9
1 - 4 -6- 5 - 7	3	(0, 3, 9, 0, 6, 3, 6, 0, 9, 3, 3)	12

Taglio di capacitá minima: $N_s = \{1, 2, 4, 6\}$ $\quad N_t = \{3, 5, 7\}$

b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco (1,3). Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

Il taglio di capacitá mimima contenente l'arco $(1, 3)$ é quello determinato dall'algoritmo ed ha capacitá $k + 9$, mentre quello non contenente l'arco $(1, 3)$ é $N_s = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ $\quad N_t = \{5, 7\}$ di capacitá 15. Il flusso massimo della rete è $k + 9$ per $0 < k \leq 6$ mentre è 15 per $k \geq 6$.