Esame di Ricerca Operativa del 31/01/2020

______________________________ ______________________________ ______________________________

(Cognome) **(Nome)** **(Numero di Matricola)**

Esercizio 1. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare $P(a)$, $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \min\ (y_1 - y_2 - y_3) \\ 2y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \ = \ 3 \\ y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \ = \ a \\ y_i \geq 0, \ i = 1, .., 4 \end{cases}$$

(a) Si determinino le basi del problema $P(a)$ discutendone l'ammissibilitá in funzione del parametro a.

(b) Risolvere il problema $P(a)$ al variare del parametro a.

(c) Formulare il problema duale associato al problema $P(a)$ e discuterne l'esistenza di una soluzione ottima.

Esercizio 2. (a) Tre operai O_1, O_2 e O_3, devono effettuare 5 lavori L_1, $L_2, ..., L_5$. Il costo di esecuzione del lavoro L_j da parte dell'operaio O_i e' c_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, .., 5$. E' noto che t_j é il tempo in ore richiesto per l'esecuzione del lavoro L_j, $j = 1, .., 5$. Sapendo che devono essere verificate le seguenti condizioni:

- Ciascun operaio non puo' eseguire piú di 2 lavori,
- Ciascun operaio non puo' lavorare piú di 30 ore,
- Nessun operaio puó eseguire simultaneamente i lavori L_1 ed L_2,

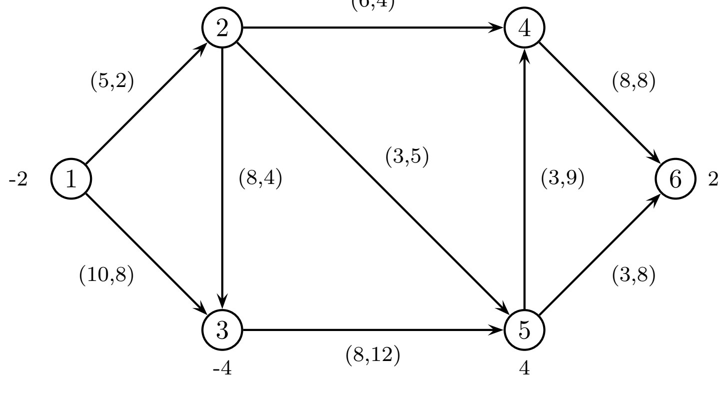
si formuli un problema di programmazione lineare per determinare come assegnare i lavori L_j agli operai O_i, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, .., 5$, al minimo costo complessivo.

variabili decisionali:

modello:

(b) Determinare un limite superiore per la somma dei tempi di esecuzione di tutti i lavori, $\sum_{j=1}^{5} t_j$, in modo che il problema abbia soluzioni ammissibili.

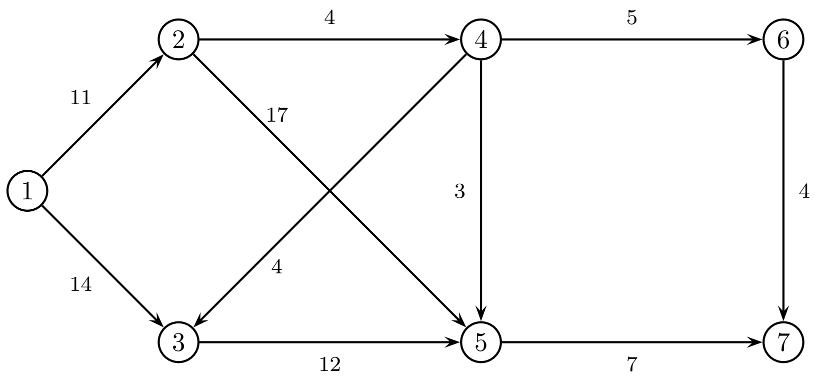
Esercizio 3. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4)	
Archi di U	(1,2) (2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

(b) Dire se il problema definito in (a) ammette un' unica soluzione ottima. Giustificare la risposta.

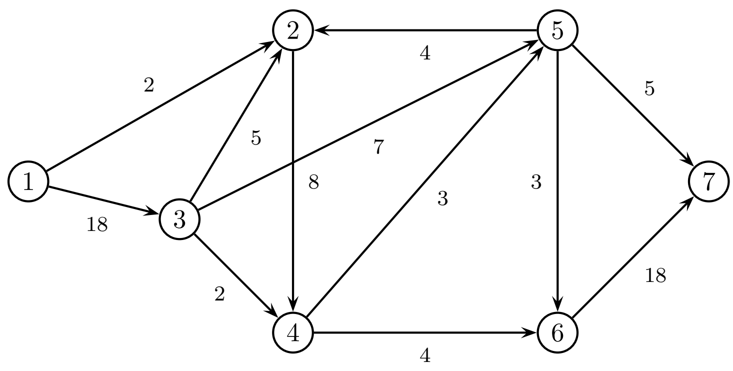
Esercizio 4. (a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla rete:



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

(b) Nella rete definita al punto (a), sia $k \in \mathbb{R}$ il costo dell'arco (2,5). Si determini in funzione di k la soluzione ottima del problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1. Giustificare la risposta.

Esercizio 5. (a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson con la procedura di Edmonds-Karp per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla rete:



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

(b) Si dica se variando le capacità degli archi (1,2) e (5,6) é possibile ottenere un aumento del flusso massimo della rete. In caso affermativo, si determini una stima del massimo aumento ottenibile. Giustificare le risposte.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare $P(a)$, $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \min\ (y_1 - y_2 - y_3) \\ 2y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \ = \ 3 \\ y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \ = \ a \\ y_i \geq 0,\ i = 1,..,4 \end{cases}$$

(a) Si determinino le basi del problema $P(a)$ discutendone l'ammissibilitá in funzione del parametro a.
Le basi sono $B_1 = \{1,2\}, B_2 = \{1,3\}, B_3 = \{1,4\}$

B_1 è ammissibile per $-3 \leq a \leq \frac{3}{2}$.

B_2 è ammissibile per $a \geq \frac{3}{2}$.

B_3 è ammissibile per $a \geq \frac{3}{2}$.

(b) Risolvere il problema $P(a)$ al variare del parametro a.

Sia $-3 \leq a \leq \frac{3}{2}$. Consideriamo la base ammissibile B_1. Si ha $y^T = (\frac{a+3}{3}, \frac{3-2a}{3}, 0, 0)$, $x^T = (0,1)$, indice entrante $k = 3$. Essendo $A_k W^i, i \in B_1 = -A_k A_{B_1}^{-1} = (0,1)$ il problema $P(a)$ é illimitato inferiormente.

Sia $a \geq \frac{3}{2}$. Consideriamo la base ammissibile B_2. Si ha $y^T = (\frac{a+3}{3}, 0, \frac{-3+2a}{3}, 0)$, $x^T = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, indice entrante $k = 2$. Essendo $A_k W^i, i \in B_2 = -A_k A_{B_2}^{-1} = (0,1)$ il problema $P(a)$ é illimitato inferiormente.
Per $a < -3$ la regione ammissibile del problema $P(a)$ è vuota.

(c) Formulare il problema duale associato al problema $P(a)$ e discuterne l'esistenza di una soluzione ottima.

Il problema duale associato a $P(a)$ è:

$$\begin{cases} \max\ (3x_1 + ax_2) \\ 2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - \ x_2 \leq -1 \\ -x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Essendo il problema $P(a)$ illimitato inferiormente per qualche valore del parametro a, segue che la regione ammissibile del problema duale di $P(a)$ è vuota, come si puo' anche verificare direttamente.

Esercizio 2. Tre operai O_1, O_2 e O_3, devono effettuare 5 lavori L_1, L_2, ..., L_5. Il costo di esecuzione del lavoro L_j da parte dell'operaio O_i e' c_{ij}, $i = 1,2,3$, $j = 1,..,5$. E' noto che t_j é il tempo in ore richiesto per l'esecuzione del lavoro L_j, $j = 1,..,5$ Sapendo che devono essere verificate le seguenti condizioni:

- Ciascun operaio non puo' eseguire piú di 2 lavori,
- Ciascun operaio non puo' lavorare piú di 30 ore,
- Nessun operaio puó eseguire simultaneamente i lavori L_1 ed L_2,

si formuli un problema di programmazione lineare per determinare come assegnare tutti i lavori L_j agli operai O_i, $i = 1,2,3$, $j = 1,..,5$, al minimo costo complessivo.

Variabili decisionali:

Sia $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'operaio } O_i \text{ esegue il lavoro } L_j \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$ $, i = 1,2,3,\ j = 1,..,5.$

Modello:

$$\begin{cases} \min\ [\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij}] \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1,\ j = 1,..,5, \\ \sum_{j=1}^{5} x_{ij} \leq 2,\ i = 1,2,3, \\ \sum_{j=1}^{5} t_j x_{ij} \leq 30,\ i = 1,2,3, \\ x_{i1} + x_{i2} \leq 1,\ i = 1,2,3 \\ x_{ij} \in \{0,1\},\ i = 1,2,3,\ j = 1,..,5. \end{cases}$$

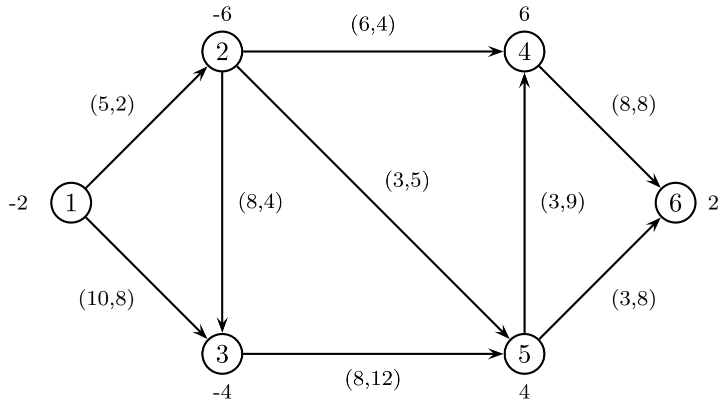
(b) Determinare un limite superiore per la somma dei tempi di esecuzione di tutti i lavori in modo che il problema abbia soluzioni ammissibili.

Affinche' il problema abbia una soluzione ammissibile e' necessario che sia $t_j \leq 30$, $j = 1, .., 5$. A tale scopo, supponendo i valori t_j interi positivi deve essere $\sum_{j=1}^{5} t_j \leq 34$. Infatti tale condizione implica, per ogni $j = 1, .., 5$,

$$t_j \leq 34 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{5} t_i \leq 30.$$

La condizione $\sum_{j=1}^{5} t_j \leq 34$ é anche sufficiente per l'esistenza di una soluzione ammissibile.

Esercizio 3. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4)	(1,3) (2,4) (3,5) (5,6) (5,4)
Archi di U	(1,2) (2,5)	(1,2) (2,5)
x	(2, 0, 0, 3, 5, 4, 2, 5, 0)	(2, 0, 0, 3, 5, 4, 0, 3, 2)
π	(0, 15, 10, 21, 18, 29)	(0, 15, 10, 21, 18, 21)
Arco entrante	(5,6)	
ϑ^+, ϑ^-	8 , 2	
Arco uscente	(4,6)	

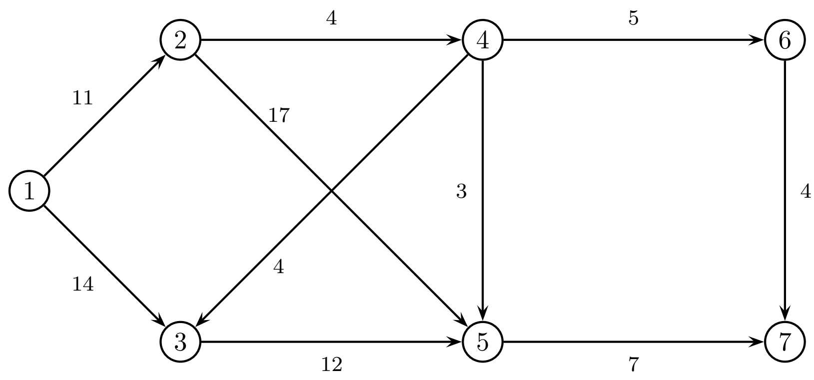
(b) Dire se il problema definito in (a) ammette un' unica soluzione ottima. Giustificare la risposta.

La soluzione $\bar{x} = (2,\ 0,\ 0,\ 3,\ 5,\ 4,\ 0,\ 3,\ 2)$ determinata alla seconda iterazione e' ottimale, di valore ottimo $c^T\bar{x} = 90$.

La soluzione $\pi = (0,\ 15,\ 10,\ 21,\ 18,\ 21)$ determinata alla seconda iterazione e' degenere essendo $c_{25} + \pi_2 - \pi_5 = 0$, cio' implica che la soluzione ottima $\bar{x}$ possa essere non unica. Infatti considerando l'arco (2,5) come arco entrante con flusso $x_{25} = 5 - \theta$ si viene a formare il ciclo non orientato $(2, 4) - (5, 4) - (2, 5)$ ove $x_{24} = 3 + \theta$,$x_{54} = 3 - \theta$; si osservi che per $0 \leq \theta \leq 1$ i flussi sugli archi del ciclo sono ammissibili ed inoltre per tali flussi il valore ottimo del problema non varia in quanto $c_{24}(3 + \theta) + c_{25}(5 - \theta) + c_{54}(3 - \theta) = 18 + 15 + 9 = 42$, per ogni θ tale che $0 \leq \theta \leq 1$.

Cosicche' la soluzione ottima del problema non é unica, ad esempio per $\theta = 1$, si ottiene la soluzione ottima alternativa $\hat{x} = (2,\ 0,\ 0,\ 4,\ 4,\ 4,\ 0,\ 2,\ 2)$, con $c^T\hat{x} = 90$.

Esercizio 4. (a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		3		4		5		6		7	
nodo 2	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1
nodo 3	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1
nodo 4	$+\infty$	-1	15	2	15	2	15	2	15	2	15	2	15	2
nodo 5	$+\infty$	-1	28	2	26	3	18	4	18	4	18	4	18	4
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	20	4	20	4	20	4	20	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	25	5	24	6	24	6
insieme Q	2, 3		3, 4, 5		4, 5		5, 6		6, 7		7		$\emptyset$	

(b) Nella rete definita al punto (a), sia $k \in \mathbb{R}$ il costo dell'arco (2,5). Si determini in funzione di k la soluzione ottima del problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1. Giustificare la risposta.

Si osservi che l'arco (2,5) non appartiene all'albero ottimo. Pertanto tale albero continuerá ad essere ottimo per $\pi_2 + k \geq \pi_5$, ove π é il vettore delle etichette determinato dall'algoritmo di Dijkstra , ossia $k \geq 7$.
Per $6 \leq k \leq 7$ la soluzione ottima sara' data dai vettori:

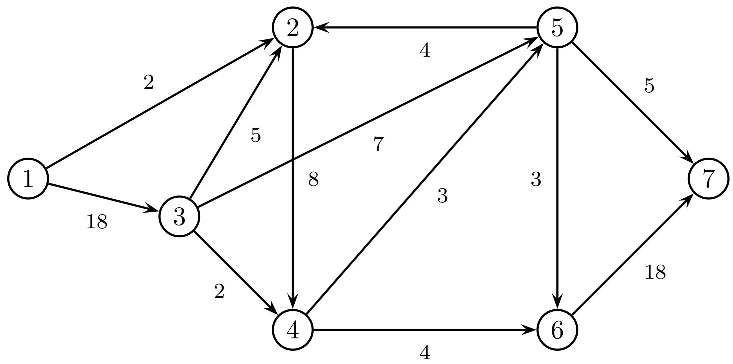
$$\pi = (0, 11, 14, 15, 11 + k, 20, 24), \quad p = (0, 1, 1, 2, 2, 4, 6).$$

Per $k \leq 6$ la soluzione ottima sara' data dai vettori:

$$\pi = (0, 11, 14, 15, 11 + k, 20, 18 + k), \quad p = (0, 1, 1, 2, 2, 4, 5).$$

Il problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1 ammette soluzione ottima per ogni $k \in \mathbb{R}$ in quanto la rete non contiene cicli orientati.

Esercizio 5. (a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson con la procedura di Edmonds-Karp per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete:



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	5	(0, 5, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 5,0)	5
1 - 2 - 4 - 6 - 7	2	(2, 5, 2, 0, 0, 5, 0, 2, 0, 0, 5, 2)	7
1 - 3 - 4 - 6 - 7	2	(2, 7, 2, 0, 2, 5, 0, 4, 0, 0, 5, 4)	9
1 - 3 - 5 - 6 - 7	2	(2, 9, 2, 0, 2, 7, 0, 4, 0, 2, 5, 6)	11
1 - 3 - 2 - 4 - 5 - 6 - 7	1	(2, 10, 3, 1, 2, 7, 1, 4, 0, 3, 5, 7)	12

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad N_t = \{6, 7\}$

(b) Si dica se variando le capacità degli archi (1,2) e (5,6) é possibile ottenere un aumento del flusso massimo della rete. In caso affermativo, si determini una stima del massimo aumento ottenibile.

L'arco (5.6) appartiene all'insieme degli archi diretti del taglio ottimo, cosicche' un aumento della capacitá di tale arco comporta un aumento del flusso della rete, essendo unico il taglio di capacità minima. Un aumento della capacità del solo arco (1,2) non comporta aumento del massimo flusso perche' tale arco non appartiene all'insieme degli archi diretti del taglio ottimo.

Aumentando simultaneamente le capacità degli archi (1,2) e (5,6) si potra' ottenere un aumento del flusso massimo che non potra' eccedere la capacità di un taglio non contenente gli archi (1,2) e (5,6), ad esempio il taglio: $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$, $N_t = \{5, 6, 7\}$ di capacitá 14. Pertanto il flusso massimo potra' crescere al piu' di due unitá.