Esame di Ricerca Operativa del 07/06/2019

(Cognome) (Nome) (Numero di Matricola)

Esercizio 1. (a) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare applicando l'algoritmo del simplesso duale:

$$\begin{cases} \min\ 2y_1 - y_2 - y_3 + 3y_5 \\ y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + y_5 \ = \ 4 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 + 4y_5 = \ 1 \\ y_i \geq 0,\ i = 1, .., 5 \end{cases}$$

	Base	y	x	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
Iterazione 1	{4,5}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

(b) Formulare il problema duale associato al problema definito in (a) e discuterne l'esistenza di una soluzione ottima. Determinare i vincoli ridondanti del problema duale.

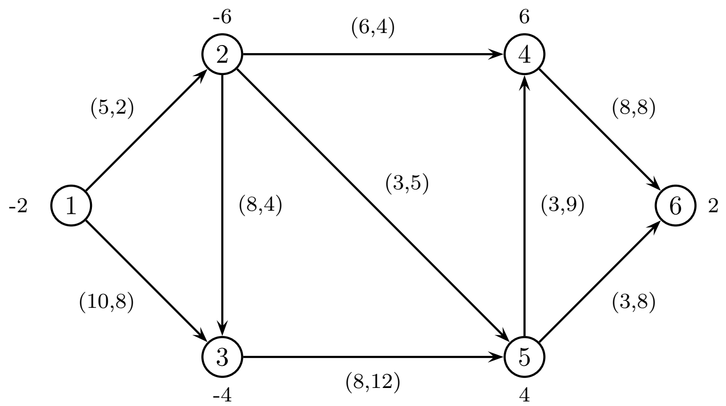
(c) Dire se $B_1 = \{1, 2\}$ e $B_2 = \{3, 4\}$ sono basi ammissibili per il problema definito in (a).

Esercizio 2. La costruzione di un palazzo richiede l'esecuzione delle attivitá A_j, $j = 1, .., 10$, ciascuna delle quali puo' essere eseguita dalla ditta D_i, $i = 1, .., 6$. Il costo di esecuzione dell'attivitá A_j da parte della ditta D_i e' c_{ij}, $i = 1, ..6$, $j = 1, .., 10$. Sapendo che ciascuna ditta non puo' eseguire piú di 4 attivitá e che la retribuzione complessiva di ciascuna ditta non puo' superare 500.000 euro, si formuli un problema di programmazione lineare per determinare l'assegnazione delle attivitá A_j alle ditte D_i, $i = 1, ..6$, $j = 1, .., 10$, al minimo costo complessivo.

variabili decisionali:

modello:

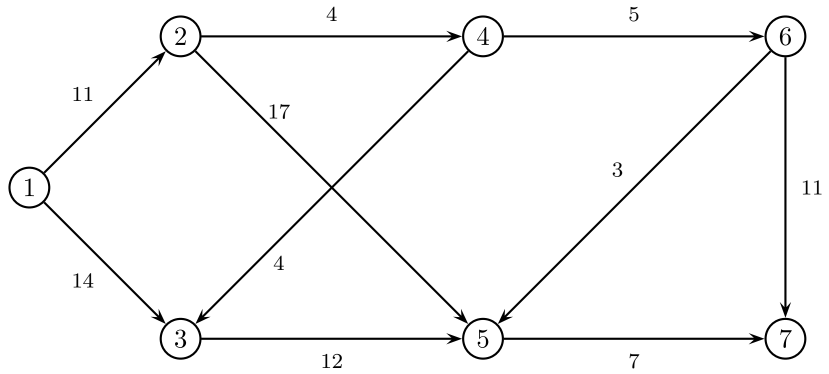
Esercizio 3. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4)	
Archi di U	(2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

(b) Discutere la degenerazione delle soluzioni di base x e π determinate alla seconda iterazione.

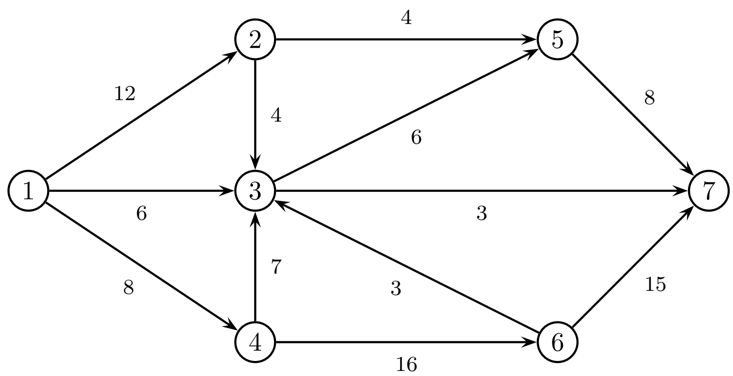
Esercizio 4. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla rete:



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

(b) Nella rete definita al punto (a), si rimpiazzi l'arco (2,5) con l'arco (5,2) assegnandogli un costo generico $k \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di k il problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1 ammette soluzione. Giustificare la risposta.

Esercizio 5. (a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson con la procedura di Edmonds-Karp per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla rete:



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$	$N_t =$

(b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco (1,3). Si determini in funzione di k, il flusso massimo della rete.

SOLUZIONI

Esercizio 1. (a) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare applicando l'algoritmo del simplesso duale:

$$\begin{cases} \min\ 2y_1 - y_2 - y_3 + 3y_5 \\ y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + y_5 \ = \ 4 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 + 4y_5 = \ 1 \\ y_i \quad \geq 0,\ i = 1, .., 5 \end{cases}$$

	Base	y	x	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
Iterazione 1	{4,5}	(0,0,0,3,1)	$(\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$	2	$\frac{5}{2}$	4
Iterazione 2	{2,5}	$(0, \frac{5}{2}, 0, 0, \frac{3}{2})$	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	3	$\emptyset$	
Iterazione 3						
Iterazione 4						

(b) Formulare il problema duale associato al problema definito in (a) e discuterne l'esistenza di una soluzione ottima. Determinare i vincoli ridondanti del problema duale.

$$\begin{cases} \max\ 4x_1 + x_2 \\ x_1 + \ x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ -x_1 + \ x_2 \leq -1 \\ x_1 - x_2 \quad \leq 0 \\ x_1 + 4x_2 \leq 3 \end{cases}$$

Essendo il problema definito in (a) inferiormente illimitato la regione ammissibile del problema duale e' vuota, come si puo' osservare dalla presenza dei vincoli incompatibili 3 e 4. Pertanto i vincoli 1,2,5 sono ridondanti.

(c) Dire se $B_1 = \{1, 2\}$ e $B_2 = \{3, 4\}$ sono basi ammissibili per il problema definito in (a).

$B_1 = \{1, 2\}$ e' una base ammissibile associata alla soluzione $y^T = (3, 1, 0, 0, 0)$ mentre $B_2 = \{3, 4\}$ non lo e' essendo $\det(A_{B_2}) = 0$.

Esercizio 2. La costruzione di un palazzo richiede l'esecuzione delle attivitá A_j, $j = 1, .., 10$, ciascuna delle quali puo' essere eseguita dalla ditta D_i, $i = 1, .., 6$. Il costo di esecuzione dell'attivitá A_j da parte della ditta D_i e' c_{ij}, $i = 1, ..6$, $j = 1, .., 10$. Sapendo che ciascuna ditta non puo' eseguire piú di 4 attivitá e che la retribuzione complessiva di ciascuna ditta non puo' superare 500.000 euro, si formuli un problema di programmazione lineare per determinare l'assegnazione delle attivitá A_j alle ditte D_i, $i = 1, ..6$, $j = 1, .., 10$, al minimo costo complessivo.

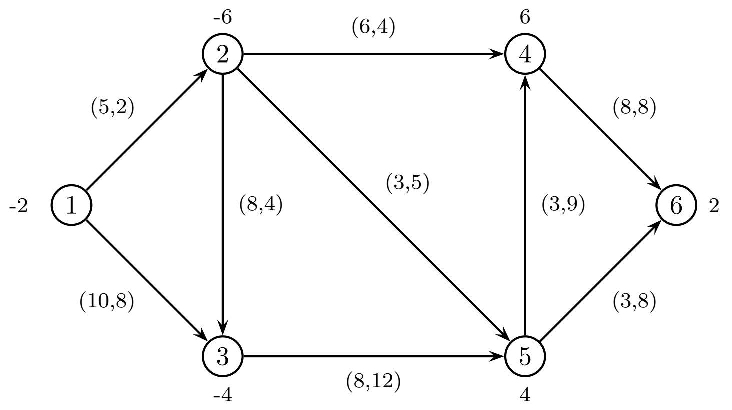
Variabili decisionali:

Sia $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la ditta } D_i \text{ esegue l'attivitá } A_j \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$, $i = 1, ..6$, $j = 1, .., 10$.

Modello:

$$\begin{cases} \min\ [\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{10} c_{ij} x_{ij}] \\ \sum_{i=1}^{6} x_{ij} = 1,\ j = 1, .., 10, \\ \sum_{j=1}^{10} x_{ij} \leq 4,\ i = 1, .., 6, \\ \sum_{j=1}^{10} c_{ij} x_{ij} \leq 500.000,\ i = 1, .., 6, \\ x_{ij} \in \{0, 1\},\ i = 1, ..6,\ j = 1, .., 10. \end{cases}$$

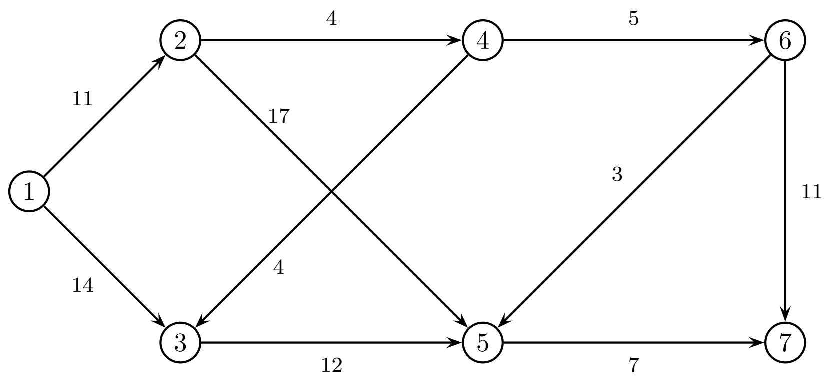
Esercizio 3. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4)	(1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4)
Archi di U	(2,5)	(1,2) (2,5)
x	(0, 2, 0, 1, 5, 6, 2, 7, 0)	(2, 0, 0, 3, 5, 4, 2, 5, 0)
π	(0, 15, 10, 21, 18, 29)	(0, 15, 10, 21, 18, 29)
Arco entrante	(1,2)	(5,6)
ϑ^+, ϑ^-	2 , 2	8 , 2
Arco uscente	(1,2)	(4,6)

(b) Discutere la degenerazione delle soluzioni di base x e π determinate alla seconda iterazione.
La soluzione x determinata alla seconda iterazione e' degenere essendo $x_{13} = 0$.
La soluzione π determinata alla seconda iterazione e' degenere essendo $c_{25} + \pi_2 - \pi_5 = 0$.

Esercizio 4. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.

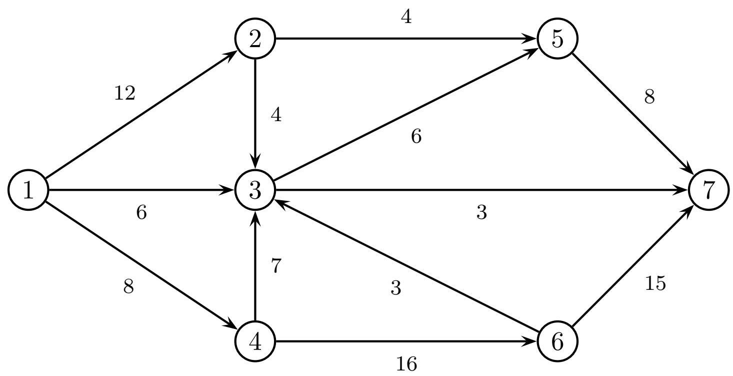


	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		3		4		6		5		7	
nodo 2	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1
nodo 3	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1
nodo 4	$+\infty$	-1	15	2	15	2	15	2	15	2	15	2	15	2
nodo 5	$+\infty$	-1	28	2	26	3	26	3	23	6	23	6	23	6
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	20	4	20	4	20	4	20	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	31	6	30	5	30	5
insieme Q	2, 3		3, 4, 5		4, 5		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

(b) Nella rete definita al punto (a), si rimpiazzi l'arco (2,5) con l'arco (5,2) assegnandogli un costo generico $k \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di k il problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1 ammette soluzione. Giustificare la risposta.

Il problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1 ammette soluzione ottima per $k \geq -12$. Infatti inserendo l'arco (5,2) si vengono a creare i cicli orientati 5-2-4-3-5 e 5-2-4-6-5 di costo $20 + k$ e $12 + k$, rispettivamente. Tali costi devono necessariamente essere non negativi, da cui la condizione $k \geq -12$.

Esercizio 5. (a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson con la procedura di Edmonds-Karp per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	3	(0, 3, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0,0)	3
1 - 2 - 5 - 7	4	(4, 3, 0, 0, 4, 0, 3, 0, 0, 4, 0, 0)	7
1 - 3- 5 - 7	3	(4, 6, 0, 0, 4, 3, 3, 0, 0, 7,0,0)	10
1 - 4 - 6 - 7	8	(4, 6, 8, 0, 4, 3, 3, 0, 8, 7, 0,8)	18
1 - 2 - 3 - 5 - 7	1	(5, 6, 8, 1, 4, 4, 3, 0, 8, 8, 0,8)	19

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

(b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco (1,3), si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

Il taglio di capacitá minima contenente l'arco (1,3) é: $N_s = \{1, 2\}$, $N_t = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ di capacitá $16 + k$, mentre il taglio di capacitá minima non contenente l'arco (1,3) é quello dato dall'algoritmo e ha capacità 19. Pertanto per $0 < k \leq 3$ il flusso massimo della rete é $16 + k$ mentre per $k \geq 3$ il flusso massimo é 19.