Esame di Ricerca Operativa del 8/6/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. (a) Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4\,x_1 + \ x_2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 - \ x_2 \leq 0 \\ 3\,x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2\,x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{3,4}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

(b) Dire se $B_1 = \{2, 3\}$ e $B_2 = \{2, 5\}$ sono basi per il problema definito in a), discutendone eventualmente l'ammissibilitá. Motivare la risposta.

(c) Dire se il problema ammette soluzioni di base degeneri.

Esercizio 2. Una ditta vuole definire un piano di turni settimanale per assicurare un servizio di sorveglianza nei giorni lavorativi. La ditta ha possibilitá di assumere i sorveglianti A, B, C e D le cui disponibilitá e retribuzioni settimanali sono indicati nella tabella ove (con $*$) sono indicati i giorni che ciascun sorvegliante puo' ricoprire.

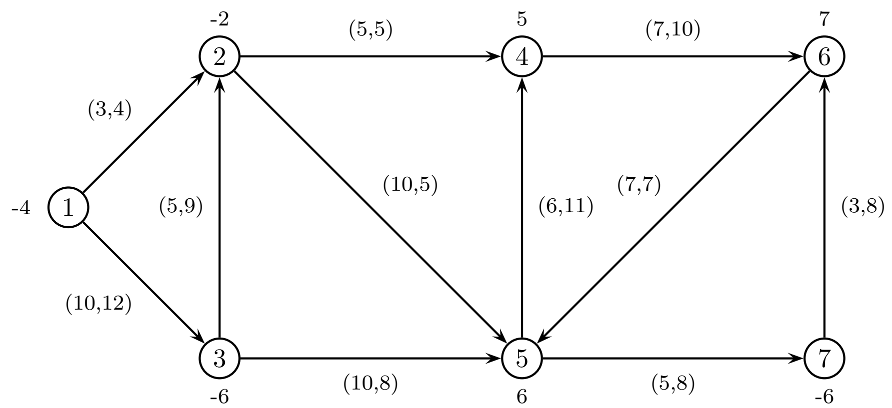
	Lun	Mar	Mer	Gio	Ven	retrib. (sett.)
A	*		*	*		6
B		*		*	*	5
C	*	*	*		*	9
D	*		*			4

Inoltre, per vincoli di carattere contrattuale, l'assunzione del sorvegliante D implica necessariamente l'assunzione del sorvegliante C. Si formuli un problema di programmazione lineare per determinare quali sorveglianti la ditta deve assumere in modo da minimizzare il costo complessivo settimanale e garantire che in ogni giorno lavorativo sia presente un sorvegliante.

variabili decisionali:

modello:

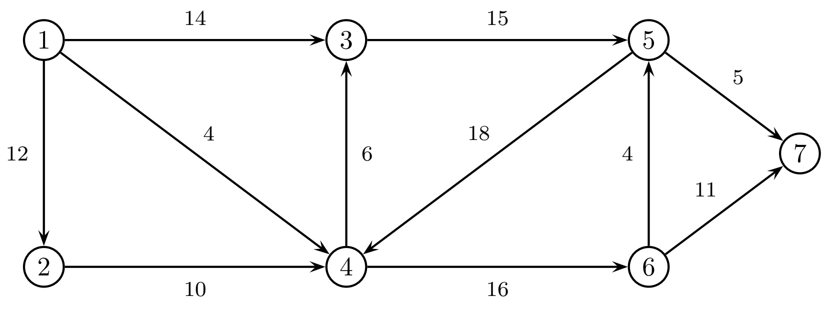
Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso per il problema di flusso di costo minimo definito dalla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,2) (1,3) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6)	
Archi di U	(2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

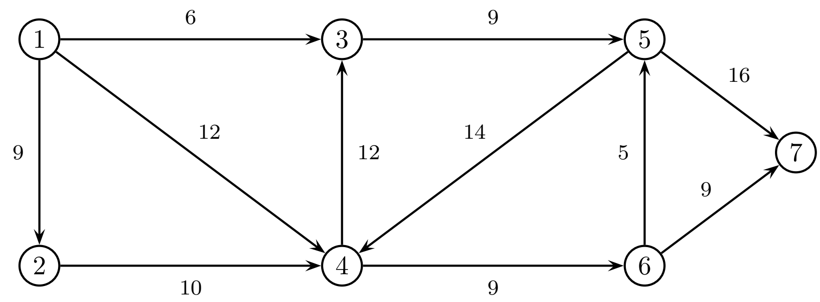
Esercizio 4. Si consideri la rete definita nell'esercizio 3 e la soluzione $\bar{x} = (4, 0, 5, 1, 0, 6, 0, 0, 1, 0, 7)$.
a) Dire se $\bar{x}$ é ammissibile;
b) Dire se $\bar{x}$ e' una soluzione di base.
Giustificare le risposte.

Esercizio 5. Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$	$N_t =$

(b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco $(5, 7)$. Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4\,x_1 + \ x_2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 - \ x_2 \leq 0 \\ 3\,x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2\,x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	$\{3,\,4\}$	$\left(\frac{7}{5},\ \frac{19}{5}\right)$	$\left(0,\ 0,\ \frac{6}{5},\ \frac{1}{5},\ 0\right)$			
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

(b) Dire se $B_1 = \{2,3\}$ e $B_2 = \{2,5\}$ sono basi per il problema definito in a), discutendone eventualmente l'ammissibilitá. Motivare la risposta.

$B_1 = \{2,3\}$ é una base essendo la matrice A_{B_1} invertibile. B_1 non é ammissibile essendo la soluzione di base associata a B_1, $x = (2,2)$, non ammissibile.

$B_2 = \{2,5\}$ non é una base, non essendo la matrice A_{B_2} invertibile.

(c) La soluzione di base $(-1,\ -1)$ é degenere in quanto aderisce ai vincoli 1,2,4.

Esercizio 2.

Variabili decisionali:

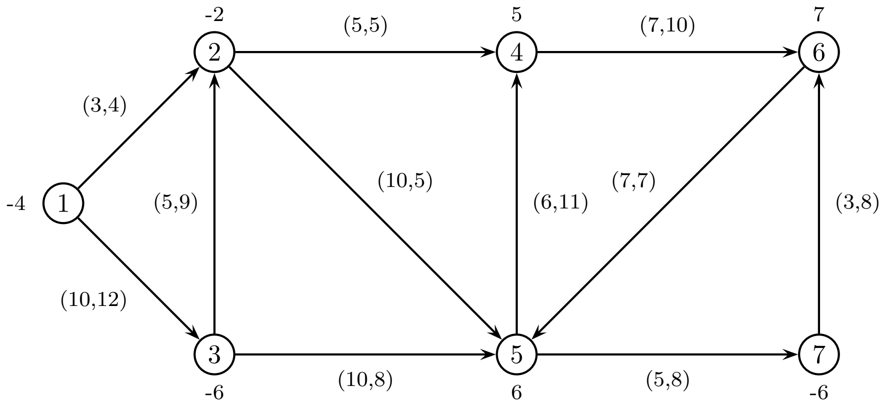
Indichiamo con $i = 1,2,3,4$ i sorveglianti A,B,C e D rispettivamente.

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ se il sorvegliante i viene assunto} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases} ;$$

Modello:

$$\begin{cases} \min\ 6x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 4x_4 \\ x_1 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_3 - x_4 \geq 0 \\ x_i \in \{0,1\}\ i = 1,..,4 \end{cases}$$

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso per il problema di flusso di costo minimo definito dalla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).

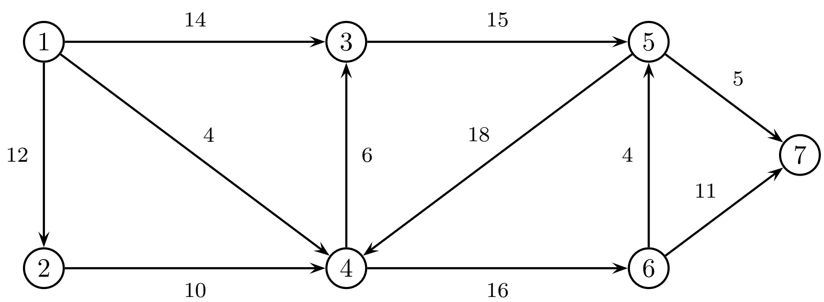


	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,2) (1,3) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6)	(1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6)
Archi di U	(2,5)	(1,2) (2,5)
x	(3, 1, 0, 5, 0, 7, 1, 6, 0, 0, 6)	(4, 0, 1, 5, 0, 6, 1, 5, 0, 0, 6)
π	(0, 3, 10, 26, 20, 33, 30)	(0, 21, 10, 26, 20, 33, 30)
Arco entrante	(2,4)	(2,5)
ϑ^+, ϑ^-	1 , 1	4 , 5
Arco uscente	(1,2)	(2,4)

Esercizio 4. Si consideri la rete definita nell'esercizio 3 e la soluzione $\bar{x} = (4, 0, 5, 1, 0, 6, 0, 0, 1, 0, 7)$.
a) Dire se $\bar{x}$ é ammissibile;
b) Dire se $\bar{x}$ e' una soluzione di base.

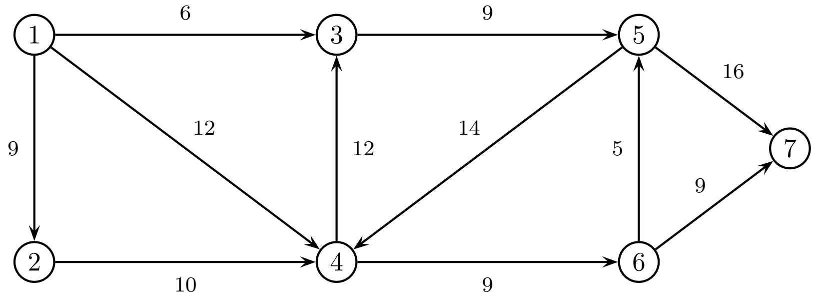
Risposte:
a) $\bar{x}$ é ammissibile in quanto soddisfa i vincoli di bilancio ai nodi e i vincoli di capacitá sugli archi.
b) $\bar{x}$ e' una soluzione di base, in quanto esiste una tripartizione (T, L, U), dell'insieme degli archi, che la genera, ove T sia un albero di copertura per la rete data, L un sottoinsieme di archi a capacitá nulla ed U un sottoinsieme di archi saturi. Possibili tripartizioni sono le seguenti:
1) $T = \{((1,2),(2,5),(3,5),(4,6),(5,7),(7,6)\}, L = \{(1,3),(3,2),(5,4),(6,5)\}, U = \{(2,4)\}$;
2) $T = \{((1,2),(2,5),(3,5),(5,4),(5,7),(7,6)\}, L = \{(1,3),(3,2),(4,6),(6,5)\}, U = \{(2,4)\}$;
3) $T = \{(1,3),(2,4),(2,5),(3,5),(5,7),(7,6)\}, L = \{(3,2),(4,6),(5,4),(6,5)\}, U = \{(1,2)\}$.

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		3		2		6		5		7	
nodo 2	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 3	14	1	10	4	10	4	10	4	10	4	10	4	10	4
nodo 4	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	25	3	25	3	24	6	24	6	24	6
nodo 6	$+\infty$	-1	20	4	20	4	20	4	20	4	20	4	20	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	31	6	29	5	29	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 5, 6		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 6, 0, 0)	6
1 - 4 - 6 - 7	9	(0, 6, 9, 0, 6, 0, 9, 0, 6, 0, 9)	15
1 - 4 - 3 - 5 - 7	3	(0, 6, 12, 0, 9, 3, 9, 0, 9, 0, 9)	18

Taglio di capacitá minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad N_t = \{5, 6, 7\}$

(b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco $(5, 7)$. Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

Un taglio di capacitá minima contenente l'arco $(5, 7)$ é $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad N_t = \{7\}$ di capacitá $9 + k$ mentre un taglio di capacitá minima non contenente l'arco $(5, 7)$ é $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad N_t = \{5, 6, 7\}$ dato dall'algoritmo di Edmonds-Karp. Pertanto, per $k \geq 9$ il flusso massimo della rete é 18, mentre per $0 < k \leq 9$ il flusso massimo é $9 + k$.