LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE (A,B) - a.a. 2012-2013
SOLUZIONI PROPOSTE
PRIMO COMPITINO - 07/11/2012

ESERCIZIO 1
Si provi che le seguenti proposizioni sono tautologie, fornendo una opportuna dimostrazione (NON una tabella di verità):

1. $\neg P \vee Q \Rightarrow R \equiv (\neg R \Rightarrow P) \wedge (Q \Rightarrow R)$;
2. $(Q \Rightarrow \neg S) \wedge (\neg R \Rightarrow (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \wedge S \Rightarrow R)$.

Soluzione (1)

$\quad \neg P \vee Q \Rightarrow$
$\equiv \quad \{$ Elim-*impl* $\}$
$\quad \neg(\neg P \vee Q) \vee R$
$\equiv \quad \{$ De Morgan, Doppia Neg. $\}$
$\quad (P \wedge \neg Q) \vee R$
$\equiv \quad \{$ Distributività $\}$
$\quad (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$
$\equiv \quad \{$ Elim-*impl*, due volte $\}$
$\quad (\neg R \Rightarrow P) \wedge (Q \Rightarrow R)$

Soluzione (2.)
Usiamo una dimostrazione con ipotesi non tautologiche, mostrando che $P \wedge S \Rightarrow R$ usando come ipotesi (a) $Q \Rightarrow \neg S$ e (b) $\neg R \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$.
Si osservi che (a) è equivalente ad (a') $S \Rightarrow \neg Q$ (per Controposizione), mentre (b) è equivalente a (b') $P \wedge \neg Q \Rightarrow R$. Infatti:

$(b) \quad \neg R \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
$\equiv \quad \{$ Elim-*impl* $\}$
$\quad \neg R \Rightarrow (\neg P \vee Q)$
$\equiv \quad \{$ Controposizione, Doppia Neg. $\}$
$\quad \neg(\neg P \vee Q) \Rightarrow R$
$\equiv \quad \{$ De Morgan, Doppia Neg. $\}$
$(b') \quad P \wedge \neg Q \Rightarrow R$

Quindi otteniamo:
$\quad P \wedge S$
$\Rightarrow \quad \{$ **Ip:** (a') $S \Rightarrow \neg Q$ $\}$
$\quad P \wedge \neg Q$
$\Rightarrow \quad \{$ **Ip:** (b') $P \wedge \neg Q \Rightarrow R$ $\}$
$\quad R$

ESERCIZIO 2
Utilizzando la logica del prim'ordine si formalizzino i seguenti enunciati dichiarativi. Indicare esplicitamente l'interpretazione intesa (la stessa per entrambi gli enunciati).

1. "Paolo e Maria sono residenti nella stessa città."
2. "I residenti di una città o ci sono nati o ci sono immigrati."

Soluzione

- **Linguaggio**
  - $\mathbf{C} = \{Paolo, Maria\}$
  - $\mathbf{F} = \emptyset$
  - $\mathbf{P} = \{persona(\_), citta(\_), residente(\_,\_), nato(\_,\_), immigrato(\_,\_)\}$
- **Interpretazione**: $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$
  - $\mathbf{D} = \mathcal{P} \uplus \mathcal{C}$, con $\mathcal{P}$ insieme delle persone e $\mathcal{C}$ insieme delle città.
  - $\alpha(Paolo) =$ "la persona chiamata Paolo"
  - $\alpha(Maria) =$ "la persona chiamata Maria"
  - $\alpha(persona)(d) \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d è una persona

- $\alpha(citta)(d) \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d è una città
- $\alpha(residente)(d, d') \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d è una persona, d' è una città, e d risiede in d'
- $\alpha(nato)(d, d') \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d è una persona, d' è una città, e d è nato a d'
- $\alpha(immigrato)(d, d') \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d è una persona, d' è una città, e d è immigrato a d'

I due enunciati possono essere formalizzati nel seguente modo:

1. $(\exists x.citta(x) \wedge residente(Paolo, x) \wedge residente(Maria, x))$
2. $(\forall x.(\forall y.persona(x) \wedge citta(y) \wedge residente(x, y) \Rightarrow nato(x, y) \vee immigrato(x, y)))$

Poiché il dominio di una variable (persona o città) è univocamente determinato dalla posizione dell'argomento in un predicato, anche le seguenti soluzioni più semplici sono corrette:

1. $(\exists x.residente(Paolo, x) \wedge residente(Maria, x))$
2. $(\forall x.(\forall y.residente(x, y) \Rightarrow nato(x, y) \vee immigrato(x, y)))$

ESERCIZIO 3

Si provi che le seguenti formule sono valide (P, Q e S contengono la variabile libera x)

1. $(\exists x.R \wedge \neg S) \wedge (\neg(\forall x.P) \Rightarrow (\forall x.S)) \Rightarrow (\forall x.P)$
2. $(\exists x.P \vee \neg Q) \wedge (\forall x.(P \Rightarrow S) \wedge (\neg S \Rightarrow Q)) \Rightarrow (\exists x.S)$

Soluzione (1.) Partiamo dalla premessa:

$(\exists x.R \wedge \neg S) \wedge (\neg(\forall x.P) \Rightarrow (\forall x.S))$

$\Rightarrow$ $\{\ \exists : \wedge\ \}$

$(\exists x.R) \wedge (\exists x.\neg S) \wedge (\neg(\forall x.P) \Rightarrow (\forall x.S))$

$\equiv$ { Controposizione, Doppia Neg. }

$(\exists x.R) \wedge (\exists x.\neg S) \wedge (\neg(\forall x.S) \Rightarrow (\forall x.P))$

$\equiv$ { De Morgan }

$(\exists x.R) \wedge \neg(\forall x.S) \wedge (\neg(\forall x.S) \Rightarrow (\forall x.P))$

$\Rightarrow$ { Sempl-$\wedge$ }

$\neg(\forall x.S) \wedge (\neg(\forall x.S) \Rightarrow (\forall x.P))$

$\Rightarrow$ { Modus Ponens }

$(\forall x.P)$

Soluzione (2.) Per la Regola di Skolemizzazione, è sufficiente dimostrare

$$(\exists x.P \vee \neg Q) \wedge (P[d/x] \vee \neg Q[d/x]) \wedge (\forall x.(P \Rightarrow S) \wedge (\neg S \Rightarrow Q)) \Rightarrow (\exists x.S)$$

dove d è una costante nuova. Partiamo dalla premessa:

$(\exists x.P \vee \neg Q) \wedge (P[d/x] \vee \neg Q[d/x]) \wedge (\forall x.(P \Rightarrow S) \wedge (\neg S \Rightarrow Q))$

$\Rightarrow$ { Sempl-$\wedge$ }

$(P[d/x] \vee \neg Q[d/x]) \wedge (\forall x.(P \Rightarrow S) \wedge (\neg S \Rightarrow Q))$

$\Rightarrow$ { Elim-$\forall$ }

$(*)\quad (P[d/x] \vee \neg Q[d/x]) \wedge (P[d/x] \Rightarrow S[d/x]) \wedge (\neg S[d/x] \Rightarrow Q[d/x])$

$\equiv$ { Elim-$\Rightarrow$, due volte, Doppia Neg. }

$(P[d/x] \vee \neg Q[d/x]) \wedge (\neg P[d/x] \vee S[d/x]) \wedge (S[d/x] \vee Q[d/x])$

$\Rightarrow$ { Risoluzione }

$(\neg Q[d/x] \vee S[d/x]) \wedge (S[d/x] \vee Q[d/x])$

$\Rightarrow$ { Risoluzione }

$S[d/x] \vee S[d/x]$

$\equiv$ { Idempotenza }

$S[d/x]$

$\Rightarrow$ { Intro-$\exists$ }

$(\exists x.S)$

Una prova alternativa, a partire da $(*)$, è la seguente:

$(*)$ $(P[d/x] \vee \neg Q[d/x]) \wedge (P[d/x] \Rightarrow S[d/x]) \wedge (\neg S[d/x] \Rightarrow Q[d/x])$

$\equiv$ { Elim-$\Rightarrow$ }

$(Q[d/x] \Rightarrow P[d/x]) \wedge (P[d/x] \Rightarrow S[d/x]) \wedge (\neg S[d/x] \Rightarrow Q[d/x])$

$\Rightarrow$ { Trans-$\Rightarrow$ }

$(Q[d/x] \Rightarrow S[d/x]) \wedge (\neg S[d/x] \Rightarrow Q[d/x])$

$\Rightarrow$ { Trans-$\Rightarrow$ }

$\neg S[d/x] \Rightarrow S[d/x]$

$\equiv$ { Elim-$\Rightarrow$, Idempotenza }

$S[d/x]$

$\Rightarrow$ { Intro-$\exists$ }

$(\exists x.S)$

ESERCIZIO 4

Sia fissata l'interpretazione dei naturali vista a lezione, estesa con i simboli di predicato $divide(\_,\_)$ e $mcm(\_,\_,\_)$ così interpretati:

- $\alpha(divide)(n, m)$ vale **true** se n è un divisore di m,
- $\alpha(mcm)(q, n, m)$ vale **true** se q è il minimo comune multiplo di n e m.

Si formalizzi il seguente enunciato dichiarativo:

"Se due numeri hanno un divisore maggiore di 1 in comune,
allora il loro prodotto è strettamente maggiore del loro minimo comune multiplo."

Soluzione

$(\forall x.(\forall y.(\exists z.z \geq 1 \wedge divide(z, x) \wedge divide(z, y)) \Rightarrow (\forall v.mcm(v, x, y) \Rightarrow x * y < v)))$

ESERCIZIO 5

Usando la definizione di semantica della logica del prim'ordine, calcolare il valore di verità della formula

$$\Phi \iff (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x) \vee R(x))$$

nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$ dove $D = \{a, b, c\}$ e α è definita come segue:

$$\alpha(P)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = a \text{ o } x = b \\ F & \text{se } x = c \end{cases} \qquad \alpha(Q)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = a \text{ o } x = c \\ F & \text{se } x = b \end{cases} \qquad \alpha(R)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = b \\ F & \text{se } x = a \text{ o } x = c \end{cases}$$

Più precisamente, si chiede di calcolare il valore di $I_{\rho_0}(\Phi)$ utilizzando le regole della semantica del prim'ordine, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.

Soluzione La formula è una quantificazione universale, pertanto applichiamo la regola (S8) a pagina 38 della dispensa [LP1]. La regola ci dice che la formula è vera in I sse (†) $I_{\rho_0[d/x]}(P(x) \Rightarrow Q(x) \vee R(x))$ è vera per ogni $d \in D = \{a, b, c\}$. Abbiamo quindi tre casi:

($d = a$) Per la regola (S1), abbiamo che $I_{\rho_0[a/x]}(P(x)) = \alpha(P)(a)$, e quindi $(*)$ $I_{\rho_0[a/x]}(P(x)) = T$ per la definizione di $\alpha(P)$. Analogamente abbiamo che $I_{\rho_0[a/x]}(Q(x)) = \alpha(Q)(a) = T$, e quindi per la regola (S5) anche $(**)$ $I_{\rho_0[a/x]}(Q(x) \vee R(x)) = T$. Infine applicando la regola (S6) a $(*)$ e $(**)$ otteniamo che $I_{\rho_0[a/x]}(P(x) \Rightarrow Q(x) \vee R(x)) = T$.

($d = b$) Il ragionamento è analogo al caso precedente, osservando che $(*)$ $I_{\rho_0[b/x]}(P(x)) = \alpha(P)(b) = T$, e $(**)$ $I_{\rho_0[b/x]}(Q(x) \vee R(x)) = T$ poiché $I_{\rho_0[b/x]}(R(x)) = \alpha(R)(b) = T$.

($d = c$) In questo caso abbiamo $(*)$ $I_{\rho_0[c/x]}(P(x)) = \alpha(P)(c) = F$, che con la regola (S6) è sufficiente per concludere che $I_{\rho_0[c/x]}(P(x) \Rightarrow Q(x) \vee R(x)) = T$.

Poichè l'implicazione (†) è vera per tutti gli elementi del dominio, anche la formula originale è vera.