LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE (A,B) - a.a. 2012-2013
PRIMO COMPITINO - 07/11/2012

Attenzione: Scrivere **nome**, **cognome**, **matricola** e **corso** in alto a destra su ogni foglio che si consegna.

ESERCIZIO 1
Si provi che le seguenti proposizioni sono tautologie, fornendo una opportuna dimostrazione (NON una tabella di verità):

1. $\neg P \vee Q \Rightarrow R \equiv (\neg R \Rightarrow P) \wedge (Q \Rightarrow R)$;
2. $(Q \Rightarrow \neg S) \wedge (\neg R \Rightarrow (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \wedge S \Rightarrow R)$.

ESERCIZIO 2
Utilizzando la logica del prim'ordine si formalizzino i seguenti enunciati dichiarativi. Indicare esplicitamente l'interpretazione intesa (la stessa per entrambi gli enunciati).

1. "Paolo e Maria sono residenti nella stessa città."
2. "I residenti di una città o ci sono nati o ci sono immigrati."

ESERCIZIO 3
Si provi che le seguenti formule sono valide (P, Q e S contengono la variabile libera x)

1. $(\exists x.R \wedge \neg S) \wedge (\neg(\forall x.P) \Rightarrow (\forall x.S)) \Rightarrow (\forall x.P)$
2. $(\exists x.P \vee \neg Q) \wedge (\forall x.(P \Rightarrow S) \wedge (\neg S \Rightarrow Q)) \Rightarrow (\exists x.S)$

ESERCIZIO 4
Sia fissata l'interpretazione dei naturali vista a lezione, estesa con i simboli di predicato $divide(\_,\_)$ e $mcm(\_,\_,\_)$ così interpretati:

- $\alpha(divide)(n, m)$ vale **true** se n è un divisore di m,
- $\alpha(mcm)(q, n, m)$ vale **true** se q è il minimo comune multiplo di n e m.

Si formalizzi il seguente enunciato dichiarativo:

"Se due numeri hanno un divisore maggiore di 1 in comune,
allora il loro prodotto è strettamente maggiore del loro minimo comune multiplo."

ESERCIZIO 5
Usando la definizione di semantica della logica del prim'ordine, calcolare il valore di verità della formula

$$\Phi \equiv (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x) \vee R(x))$$

nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$ dove $D = \{a, b, c\}$ e α è definita come segue:

$$\alpha(P)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = a \text{ o } x = b \\ F & \text{se } x = c \end{cases} \qquad \alpha(Q)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = a \text{ o } x = c \\ F & \text{se } x = b \end{cases} \qquad \alpha(R)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = b \\ F & \text{se } x = a \text{ o } x = c \end{cases}$$

Più precisamente, si chiede di calcolare il valore di $I_{\rho_0}(\Phi)$ utilizzando le regole della semantica del prim'ordine, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.