Logica per la Programmazione

Esercitazione dell'11 novembre 2010 - Soluzioni

a) Formalizzare ciascuna delle asserzioni seguenti mediante una formula del calcolo del primo ordine e una opportuna interpretazione

1) **Non è oro tutto ciò che luccica**
   a) Dominio: oggetti
   b) Alfabeto: "oro", "luccica" predicati unari; = pred. binario.
   c) Interpretazone: α(oro(x)) = "x è d'oro"; α(luccica(x)) = "x luccica", = uguaglianza
   d) Formula: ($\exists$ x. luccica(x) $\wedge \sim$ oro(x))
2) **Tutti sono amici di se stessi**
   a) Dominio: persone
   b) Alfabeto: "amici" pred. binario
   c) Interpretazione: α(amici(x,y)) = "x e y sono amici"
   d) Formula: ($\forall$ x . amici(x, x))
3) **Tutti hanno qualcuno che è loro amico**
   a) Dominio, alfabeto e interpretazione: come sopra
   b) Formula: ($\forall$ x . ($\exists$ y . amici(x, y)))
4) **Gli amici dei miei amici sono miei amici**
   a) Dominio, alfabeto e interpretazione: come sopra e in più:
      "io" costante; α(io) = "chi sta leggendo la frase". Es: il Prof.
   b) Formula ($\forall$ x . ($\exists$ y . amici(x, y) $\wedge$ amici (y, io)) $\Rightarrow$ amici(x, io))

b) Si formalizzino i seguenti enunciati, utilizzando come dominio di interesse l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$:

[Nota: 1), 2), 4) e 6) ci consentono di introdurre nuovi simboli di predicato sui naturali]

1) **x divide y** [**NOTA**: è un enunciato "aperto", ci aspettiamo una formula con x, y libere]
   a) introduco *, funzione binaria (moltiplicazione) e =, predicato binario (uguaglianza)
   b) divide(x, y) $\equiv$ ($\exists$ z . x * z = y)
2) **x è pari**
   a) introduco 2, costante ("il numero 2 $\in \mathbb{N}$")
   b) pari(x) $\equiv$ divide(2, x)
3) **tutti i numeri sono pari**
   a) ($\forall$x . pari(x))
4) **x è un numero primo**
   a) primo(x) $\equiv$ ($\forall$y . divide(y, x) $\Rightarrow$ (y = 1) $\vee$ (y = x))
5) **se x è pari allora y è uguale a x, altrimenti y è il doppio di x**

a) $(pari(x) \Rightarrow x = y) \wedge (\sim pari(x) \Rightarrow y = 2 * x)$ oppure

b) $(pari(x) \wedge x = y) \vee (\sim pari(x) \wedge y = 2 * x)$

[**NOTA**: la condizione ~ pari(x) va sempre messa esplicitamente, diversamente dall'italiano. Esercizio: dimostrare che le due formule sono equivalenti. Sugg: per casi!]

6) x è il Massimo Comun Divisiore (MCD) tra y e z

a) introduco $\leq$, predicato binario ("minore o uguale di")

b) $MCD(x, y, z) \equiv$

$$divide(x, y) \wedge divide(x, z) \wedge (\forall w.\ divide(w, y) \wedge divide(w, z) \Rightarrow w \leq x)$$

7) non esiste un numero maggiore di tutti gli altri

a) $\sim (\exists x.\ (\forall z.\ z \leq x))$

c) Formalizzazione di operazioni su insiemi (Sezione 8.2 di [LP1])

1) Supponiamo di aver fissato

a) Dominio: elementi di un insieme **A** e sottoinsiemi di **A**

b) Predicati: **obj**, **set**, di arietà 1, e $\in$, di arietà 2

c) Interpretazione:

a) **obj**(**d**) vale **T** se e solo se "**d** è un elemento di **A**"

b) **set**(**D**) vale **T** se e solo se "**D** è un sottinsieme di **A**"

c) **d** $\in$ **D** vale **T** se e solo se "**d** è un elemento di **D**"

NOTA: Per semplificare, useremo minuscole e maiuscole per distinguere elementi e insiemi quando possibile.

d) Sappiamo inoltre che ogni insieme è caratterizzato univocamente dai suoi elementi, cioè vale $(\forall x.\ obj(x) \Rightarrow x \in A \equiv x \in B) \equiv (A = B)$

2) Utilizziamo questa interpretazione per definire operazioni e relazioni su insiemi

a) Costanti: insieme vuoto $\emptyset$

a) Formula: $\mathbf{set}(\emptyset) \wedge (\forall x .\ \mathbf{obj}(x) \Rightarrow \sim (x \in \emptyset))$

b) Mostriamo che questa costante ha un'unica possibile interpretazione che rende vera la formula:

a) **set**($\emptyset$) : deve essere un sottoinsieme di **A,**

b) se fissiamo $\alpha(\emptyset)$ = "insieme vuoto", la formula è soddisfatta

c) nessun altro sottinsieme di **A** soddisfa la formula

c) Possiamo semplificare la formula in $(\forall x .\ \sim (x \in \emptyset))$ perché x minuscola (quindi assumiamo **obj**(x)) e $\emptyset$ deve essere un insieme perché a ds. di $\in$

b) Operazioni: unione $\cap$, intersezione $\cup$, differenza $\backslash$

c) Relazioni: inclusione $\subseteq$, inclusione stretta $\subset$

d) Una **relazione** (**binaria**) **R tra gli insiemi A e B** è un sottoinsieme del prodotto cartesiano **A × B**, costituito da tutte le coppie di elementi di **A** e **B**.

1) Formalizzare il concetto di **relazione di equivalenza su A**, cioè una relazione binaria tra **A** e **A** che soddisfa la propretà riflessiva, simmetrica e transitiva. (Sezione 8.2 di [LP1])

2) Formalizzare il concetto di **funzione parziale**, **totale**, **iniettiva**, **surgettiva** da **A** ad **B**.

   a) **R** è una funzione (o “relazione univalente”)

      $(\forall a.\ (\forall\ b_1.\ (\forall\ b_2.\ R(a, b_1) \wedge R(a, b_2) \Rightarrow b_1 = b_2\ )))$

      anche: $(\forall a, b_1, b_2.\ \ R(a, b_1) \wedge R(a, b_2) \Rightarrow b_1 = b_2\ ) \ \equiv\ Fun_R$

   b) **R** è una relazione totale

      $(\forall a.\ \ a \in A \Rightarrow (\exists\ b.\ R(a, b))) \ \equiv\ Tot_R$

   c) **R** è una funzione totale

      $Fun_R \wedge Fun_R$ oppure

      $(\forall a.\ a \in A \Rightarrow (\exists\ b.\ R(a, b) \wedge (\forall\ b_1.\ R(a, b_1) \Rightarrow b_1 = b_2))) \ \equiv\ FunTot_R$

   d) **R** è una funzione iniettiva

      $FunTot_R \wedge\ (\forall\ a_1, a_2, b.\ \ R(a_1, b) \wedge R(a_2, b) \Rightarrow a_1 = a_2\ )$

   e) **R** è una funzione surgettiva

      $FunTot_R \wedge\ (\forall\ b.\ \ (\exists\ a.\ R(a, b))$