LOGICA DEL PRIMO ORDINE: SEMANTICA

Corso di Logica per la Programmazione

A.A. 2010/11

Andrea Corradini, Paolo Mancarella

LA SEMANTICA DELLA LOGICA DEL PRIMO ORDINE

- Sia fissato un linguaggio ***L*** del primo ordine con alfabeto (***C***, ***F***, ***V***, ***P***).
- Data un'interpretazione **I** = (***D***, α) e una formula φ su ***L***, vogliamo definire in modo formale la **semantica** di φ in **I**, cioè il suo **valore di verità**
- Per far questo, dobbiamo prima dare la **semantica** dei termini che compaiono in φ
  - I termini **chiusi** denotano elementi del dominio
  - Se un termine contiene delle variabili, allora è **aperto**. La sua semantica dipende da un **assegnamento** che associa un elemento del dominio ad ogni variabile.

UN ESEMPIO DI INTERPRETAZIONE

- Il linguaggio **L**
  - $\boldsymbol{C} = \{\mathbf{a}\}$
  - $\boldsymbol{F} = \{\mathbf{f}\}$, con arietà 1
  - $\boldsymbol{P} = \{\mathbf{p}\}$, con arietà 2
- L'interpretazione $\mathbf{I} = (\boldsymbol{D}, \alpha)$
  - $\boldsymbol{D} = \mathbb{N}$, insieme dei numeri naturali
  - $\alpha(\mathbf{a}) = 0$
  - $\alpha(\mathbf{f})$ = successore: $(\alpha(\mathbf{f}))(n) = n + 1$
  - $\alpha(\mathbf{p})$ è la relazione di maggiore sui naturali,

    $(\alpha(\mathbf{p}))\ (7, 5) \equiv \mathbf{T}$

    $(\alpha(\mathbf{p}))\ (11, 18) \equiv \mathbf{F}$

SEMANTICA DEI TERMINI CHIUSI

- Data un'interpretazione $\mathbf{I} = (\boldsymbol{D}, \alpha)$, la semantica di un termine chiuso t (ovvero senza variabili) è ottenuta per **induzione strutturale** con le due regole seguenti:
- (R1) se t è una costante **c** allora $\alpha(t) = \alpha(\mathbf{c})$
- (R2) se $t = \mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)$ e $\alpha(t_1) = d_1, \ldots, \alpha(t_n) = d_n$

  allora $\alpha(t) = (\alpha(\mathbf{f}))(d_1, \ldots, d_n)$

- Esempio: considerando l'esempio precedente

$$\alpha(\ \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a})))\ ) = \alpha(\mathbf{a}) + 1 + 1 + 1 = 3$$

ASSEGNAMENTI

- E' possibile dare semantica ad un termine aperto (contenente variabili) rispetto ad un **assegnamento**
- Un assegnamento è una funzione che associa ad ogni variabile in $\boldsymbol{V}$ un valore in $\boldsymbol{D}$: $\rho: V \rightarrow D$
- Con $\boldsymbol{\rho[d/x]}$ intendiamo l'assegnamento $\boldsymbol{\rho}$ modificato in modo tale che associ alla variabile **x** il valore **d**, ovvero

  $(\rho[d/x])(y) = d$ se $x = y$,

  $(\rho[d/x])(y) = \rho(y)$ altrimenti

- Es. se $\boldsymbol{D} = \mathbb{N}$, $\rho(x) = 0$, $\rho(y) = 3$, $\rho(z) = 1$ e

  $\rho_1 = \rho[15/z]$,

  allora $\rho_1(x) = 0$, $\rho_1(y) = 3$, $\rho_1(z) = 15$

SEMANTICA DEI TERMINI APERTI

- Data un'interpretazione **I** = (***D***,α) e un **assegnamento** ρ: $V \to D$, la semantica di un termine aperto t, in simboli $\alpha_\rho(t)$, è ottenuta con le tre regole:
- (R0) se t è la variabile x allora $\alpha_\rho(t) = \rho(x)$
- (R1) se t è una costante c allora $\alpha_\rho(t) = \alpha(c)$
- (R2) se $t = f(t_1, \ldots ,t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1, \ldots , \alpha_\rho(t_n) = d_n$ allora $\alpha_\rho(t) = (\alpha(f))(d_1, \ldots ,d_n)$

- Esempio: considerando l'esempio precedente, se $\rho(x) = 2$, allora $\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))) = \alpha(x) + 1 + 1 = 4$

SEMANTICA DELLE FORMULE ATOMICHE

- Diamo ora la semantica a una formula atomica $\boldsymbol{\varphi}$ nell'intepretazione **I** sotto un assegnamento $\boldsymbol{\rho}$, (in simboli $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\varphi})$) con le seguenti regole per **induzione strutturale**:
- (S1) se $\varphi = p(t_1, \dots ,t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1, \dots , \alpha_\rho(t_n) = d_n$ allora $I_\rho(\varphi) = (\alpha(p))(d_1, \dots , d_n)$
    - caso particolare: il predicato a zero argomenti, ovvero la proposizione: $I_\rho(p) = \alpha(p)$
- (S2) se $\varphi = (P)$ allora $I_\rho(\varphi) = I_\rho(P)$,

  ovvero le parentesi hanno influenza solo sull'ordine di valutazione, ma non sul valore delle formule

SEMANTICA DEI CONNETTIVI LOGICI, PER INDUZIONE STRUTTURALE

- (S3) $I_\rho(\sim P) = \mathbf{T}$ se ...

  $I_\rho(P) = \mathbf{F}$, $I_\rho(\sim P) = \mathbf{F}$ se $I_\rho(P) = \mathbf{T}$
- (S4) $I_\rho(P \wedge Q) = \mathbf{T}$ se ...

  $I_\rho(P) = \mathbf{T}$ e $I_\rho(Q) = \mathbf{T}$, $I_\rho(P \wedge Q) = \mathbf{F}$ altrimenti
- (S5) $I_\rho(P \vee Q) = \mathbf{F}$ se ...

  $I_\rho(P) = \mathbf{F}$ e $I_\rho(Q) = \mathbf{F}$, $I_\rho(P \vee Q) = \mathbf{T}$ altrimenti
- (S6) $I_\rho(P \Rightarrow Q) = \mathbf{F}$ se ...

  $I_\rho(P) = \mathbf{T}$ e $I_\rho(Q) = \mathbf{F}$, $I_\rho(P \Rightarrow Q) = \mathbf{T}$ altrimenti
- (S7) $I_\rho(P \equiv Q) = \mathbf{T}$ se ...

  $I_\rho(P) = I_\rho(Q)$, $I_\rho(P \equiv Q) = \mathbf{F}$ altrimenti

SEMANTICA DEI QUANTIFICATORI

- (S8) $I_\rho((\forall x.P)) = \mathbf{T}$ se ...

  ... $I_{\rho[\mathbf{d}/x]}(P) = \mathbf{T}$ per qualunque **d** in *D*,

  $I_\rho((\forall x.P)) = \mathbf{F}$ altrimenti
- (S9) $I_\rho((\exists x.P)) = \mathbf{T}$ se ...

  ... $I_{\rho[\mathbf{d}/x]}(P) = \mathbf{T}$ per almeno un **d** in *D*,

  $I_\rho((\exists x.P)) = \mathbf{F}$ altrimenti
- **Nota**: l'uso dell'assegnamento ρ è necessario perché bisogna far riferimento all'intero dominio *D*: ci possono essere elementi di *D* non denotabili con termini chiusi.
- **Es**: $D = \mathbb{N}$, $\boldsymbol{C} = \{0, 2\}$, $\boldsymbol{F} = \{\_+\_\}$, $\boldsymbol{P} = \{\text{pari}(\_)\}$

  La formula $(\exists x.\ \sim\text{pari}(x))$ è vera, ma non esiste un termine chiuso **t** tale che $\sim\text{pari}(\mathbf{t})$ sia vera

ESEMPIO DI SEMANTICA: VALORE DI VERITA' DI FORMULE

	Dominio	a	b	c	p(x)
I_1	città italiane	Milano	Roma	Pontedera	x capoluogo
I_2	{5,10,15}	5	10	15	x multiplo di 5
I_3	numeri naturali	5	10	15	x multiplo di 5

Formula	Valore in I_1	Valore in I_2	Valore in I_3
$p(a)$	T	T	T
$p(b)$	T	T	T
$p(c)$	F	T	T
$p(a) \wedge p(c)$	F	T	T
$(\exists x.p(x))$	T	T	T
$(\forall x.p(x))$	F	T	F
$(\exists x.p(x)) \wedge (\exists y.\sim p(y))$	T	F	T

MODELLI

- Sia **I** una interpretazione e φ una formula chiusa.
  Se φ è vera in **I** diciamo che **I** è un **modello** di φ e scriviamo
  $$\mathbf{I} \models \varphi$$
- Se Γ è un insieme di formule, con
  $$\mathbf{I} \models \Gamma$$
  intendiamo che **I** è un modello per tutte le formule in Γ

- Se una formula è vera in almeno una interpretazione si dice che è **soddisfacibile** altrimenti è **insoddisfacibile**
- Se una formula è vera in tutte le interpretazioni si dice che è **valida** (estensione del concetto di **tautologia**) e scriviamo
  $$\models \varphi$$

ESEMPI

- Formula **soddisfacibile**

  $p(a)$

  Con $\boldsymbol{D} = \mathbb{N}$

  $\mathbf{a} = 44$

  $\mathbf{p(x)} = \mathbf{T}$ se $\mathbf{x}$ è pari, $\mathbf{F}$ altrimenti
- Formula **valida**

  $(\forall x.p(x) \vee \sim p(x))$
  - Corrispondono alle **tautologie**
- Formula **insoddisfacibile**

  $p(a) \wedge \sim p(a)$
  - Corrispondono alle **contraddizioni**

CONSEGUENZA LOGICA

- Il concetto di **conseguenza logica** consente di **parametrizzare** la validità di una formula φ rispetto ad una teoria rappresentata da un insieme di formule Γ
- Diciamo che φ è una **conseguenza logica** di Γ e scriviamo

$$\Gamma \models \varphi$$

se e soltanto se φ è vera in tutti i modelli di Γ,

ovvero ***tutte le interpretazioni che rendono vere le formule in Γ rendono vera anche φ***