



LOGICA DEL PRIMO ORDINE CON INSIEMI E INTERVALLI

**Corso di Logica per la Programmazione
A.A. 2010/11**

Andrea Corradini, Paolo Mancarella

RAPPRESENTAZIONI INTENSIONALI ED ESTENSIONALI DI INSIEMI

- Assumiamo come universo i naturali e i sottoinsiemi di naturali
- Rappresentazione estensionale (*in extenso*) di insemi
 $\text{Divisori_di_30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
- Rappresentazione intensionale (*in intenso*) di insiemi
 $\text{Divisori_di_30} = \{x \mid x \leq 30 \wedge (\exists n. x \times n = 30)\}$
- Rappresentazione intensionale per insiemi infiniti
 $\text{Multipli_di_7} = \{x \mid (\exists n. x = n \times 7)\}$



NOTAZIONE PER INSIEMI

- Estendiamo il linguaggio del primo ordine per rappresentare insiemi di naturali in modo intensionale
 - $\text{Term} ::= \text{Const} \mid \text{Var} \mid \text{FId}(\text{Term } \{, \text{Term}\}) \mid \text{'\{ ' Var ' | ' Fbf '}'$
 - Abbiamo termini come $\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{P} \}$ dove \mathbf{x} è una variabile, e \mathbf{P} una formula (tipicamente con \mathbf{x} libera). \mathbf{x} è legata in $\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{P} \}$
 - Nuovo simbolo di predicato binario \in , definito dalla legge:
$$(\text{def-}\in) \quad \mathbf{y} \in \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{P} \} \equiv \mathbf{P}[\mathbf{y}/\mathbf{x}]$$
 - Nuova costante \emptyset , definita come $\emptyset = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{F} \}$
 - Dimostriamo che $(\forall \mathbf{y}. \mathbf{y} \in \emptyset \equiv \mathbf{F})$ è valida:
$$\begin{aligned} \mathbf{y} \in \emptyset & \quad [\text{Per generalizzazione}] \\ \equiv \{ \text{def di } \emptyset \} \\ \mathbf{y} \in \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{F} \} \\ \equiv \{ \text{def di } \in \} \\ \mathbf{F} \end{aligned}$$



LEGGI PER INSIEMI

- (Ins: \equiv)

$$(\forall x. P \equiv Q) \Rightarrow \{x \mid P\} = \{x \mid Q\}$$

- (Ins: \Rightarrow)

$$(\forall x. P \Rightarrow Q) \Rightarrow \{x \mid P\} \subseteq \{x \mid Q\}$$

- Dimostriamo la seconda

$$z \in \{x \mid P\}$$

$$\equiv \quad \{\text{def-}\in\}$$

$$P [z/x]$$

$$\Rightarrow \quad \{\text{Ip: } (\forall x. P \Rightarrow Q), \text{Elim-}\forall\}$$

$$Q [z/x]$$

$$\equiv \quad \{\text{def-}\in\}$$

$$z \in \{x \mid Q\}.$$



UGUAGLIANZE E DISUGUAGLIANZE

Estendiamo ora il linguaggio del primo ordine con i predicati binari \leq e \geq (con l'ovvio significato).

I predicati $=$, \leq e \geq soddisfano i seguenti assiomi (in cui la quantificazione universale è implicita):

- $x = x$ (riflessività- $=$)
- $(x = y) \Rightarrow (y = x)$ (simmetria- $=$)
- $(x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z)$ (transitività- $=$)

- $x \leq x$ (riflessività- \leq)
- $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$ (antisimmetria- \leq)
- $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$ (transitività- \leq)
- $(x \leq y) \vee (y \leq x)$ (totalità- \leq)
- $(x \geq y) \equiv (y \leq x)$ (def- \geq)



UN PO' DI TERMINOLOGIA...

- Una relazione binaria R è una **relazione di equivalenza** se è
 - riflessiva: $x R x$
 - simmetrica: $x R y \Rightarrow y R x$
 - transitiva: $(x R y) \wedge (y R z) \Rightarrow x R z$
 - Esempio: l'uguaglianza $=$, equivalenza \equiv
- Una relazione binaria è una **relazione di ordinamento** se è
 - riflessiva, transitiva e anti-simmetrica: $(x R y) \wedge (y R x) \Rightarrow x = y$
 - Esempio: inclusione tra insiemi
- Una relazione di ordinamento è **totale** se
 - per ogni x, y $(x R y) \vee (y R x)$
 - Esempio: \leq su numeri naturali



INTERVALLI: NOTAZIONE E DEFINIZIONI

Introduciamo le seguenti abbreviazioni sintattiche, $a, b \in \mathbf{N}$:

- $[a, b] \equiv \{x \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$ intervallo chiuso
- $[a, b) \equiv \{x \mid a \leq x \wedge x < b\}$ intervallo semiaperto a destra
- $(a, b] \equiv \{x \mid a < x \wedge x \leq b\}$ intervallo semiaperto a sinistra
- $(a, b) \equiv \{x \mid a < x \wedge x < b\}$ intervallo aperto

Definizione di relazioni ausiliarie:

- $x \neq y \equiv \sim(x = y)$ (def- \neq)
- $x < y \equiv x \leq y \wedge x \neq y$ (def- $<$)
- $x > y \equiv x \geq y \wedge x \neq y$ (def- $>$)



RELAZIONI TRA DISUGUAGLIANZE

○ Leggi (\sim - \leq)

- $\sim(x \leq y) \equiv x > y$
- $\sim(x \geq y) \equiv x < y$

○ Dimostriamo la prima, usando il seguente lemma:

$$x \neq y \equiv \sim(x \leq y) \vee \sim(x \geq y)$$

[con antisimm- \leq , rifl- \leq]

○ Esercizi:

- $\sim(x < y) \equiv x > y \vee x = y$
- $\sim(x > y) \equiv x < y \vee x = y$

$$x > y$$

$$\equiv \{\text{def-}\rightarrow\}$$

$$x \geq y \wedge x \neq y$$

$$\equiv \{\text{lemma}\}$$

$$(x \geq y) \wedge (\sim(x \leq y) \vee \sim(x \geq y))$$

$$\equiv \{\text{complemento}\}$$

$$x \geq y \wedge \sim(x \leq y)$$

$$\sim(x \leq y)$$

$$\equiv \{\text{totalità, } P \wedge T = P\}$$

$$\sim(x \leq y) \wedge (x \geq y \vee x \leq y)$$

$$\equiv \{\text{complemento}\}$$

$$\sim(x \leq y) \wedge x \geq y$$



QUANTIFICAZIONE RISTRETTA A UN INSIEME: DOMINI

- Spesso la quantificazione (universale o esistenziale) è ristretta agli elementi che soddisfano una formula
- Si introducono le seguenti **abbreviazioni**:
 $(\forall x.P \Rightarrow Q)$ viene scritta come $(\forall x:P . Q)$
e
 $(\exists x.P \wedge Q)$ viene scritta come $(\exists x:P . Q)$
- In queste formule, **P** è il *dominio* del quantificatore
- **Attenzione**: queste abbreviazioni vengono usate diffusamente nelle dispense, ma le eviteremo a lezione. Nei compiti d'esame potete usarle a vostro piacimento.
- Il dominio **P** è **vuoto** se $P[v/x] \equiv \mathbf{F}$ per ogni elemento **v** del dominio di interpretazione (o se $\sim(\exists x.P) \equiv \mathbf{T}$)



FORMULE VACUAMENTE VERE

- Una formula quantificata universalmente è *vacuamente vera* se il dominio è vuoto. Mostriamo infatti che se P è vuoto, allora $(\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv \mathbf{T}$ indipendentemente da Q .

$$(\forall x.P \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \mathbf{Ip}: P \text{ vuoto, cioè } P \equiv \mathbf{F} \}$$

$$(\forall x.\mathbf{F} \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \mathbf{F} \Rightarrow Q \equiv \mathbf{T} \}$$

$$(\forall x.\mathbf{T})$$

- Due casi:
 - Se il dominio di interpretazione non è vuoto allora per (costante) $(\forall x.\mathbf{T}) \equiv \mathbf{T}$.
 - Se il dominio di interpretazione è vuoto, allora $(\forall x.\mathbf{T}) \equiv \mathbf{T}$ per la definizione di semantica



QUANTIFICAZIONE ESISTENZIALE SU DOMINIO VUOTO

- Dualmente, la formula $(\exists x. P \wedge Q)$ è falsa se P è vuoto, indipendentemente da Q . Infatti:

$$(\exists x. P \wedge Q)$$

$$\Rightarrow \{ \text{legge } (\exists : \wedge) \}$$

$$(\exists x. P) \wedge (\exists x. Q)$$

$$\equiv \{ P \text{ è vuoto, cioè } P \equiv \mathbf{T} \}$$

$$(\exists x. \mathbf{F}) \wedge (\exists x. Q)$$

$$\equiv \{ (\text{costante}) \text{ se dominio non vuoto, semantica altrimenti} \}$$

$$\mathbf{F} \wedge (\exists x. Q)$$

$$\equiv \{ \text{zero} \}$$

$$\mathbf{F}$$



ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI (1)

○ Annidamento

- $(\forall y.R \Rightarrow (\forall x.S \Rightarrow P)) \equiv (\forall x.S \Rightarrow (\forall y.R \Rightarrow P))$

se y non è libera in S e x non è libera in R

- $(\exists y.R \wedge (\exists x.S \wedge P)) \equiv (\exists x.S \wedge (\exists y.R \wedge P))$

se y non è libera in S e x non è libera in R

○ $(\forall:\wedge)$

$$(\forall x.R \Rightarrow P \wedge Q) \equiv (\forall x.R \Rightarrow P) \wedge (\forall x.R \Rightarrow Q)$$

○ $(\exists:\vee)$

$$(\exists x.R \wedge (P \vee Q)) \equiv (\exists x.R \wedge P) \vee (\exists x.R \wedge Q)$$

○ Esercizio: si dimostrino alcune delle leggi elencate



ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI (2)

- Costante

$(\forall x.R \Rightarrow Z) \equiv Z$ se x non è libera in Z e R non è vuoto

$(\exists x.R \wedge Z) \equiv Z$ se x non è libera in Z e R non è vuoto

- Distributività

$(\forall x.R \Rightarrow P) \vee Z \equiv (\forall x. R \Rightarrow P \vee Z)$ se x non è libera in Z

$(\exists x.R \wedge P) \wedge Z \equiv (\exists x. R \wedge P \wedge Z)$ se x non è libera in Z

- Esercizio: si dimostrino alcune delle leggi elencate



ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI (3)

- Distributività

$$(\forall x. R \Rightarrow P) \wedge Z \equiv (\forall x. R \Rightarrow P \wedge Z)$$

se x non è libera in Z e R non è vuoto

$$(\exists x. R \wedge P) \vee Z \equiv (\exists x. R \wedge (P \vee Z))$$

se x non è libera in Z e R non è vuoto

- De Morgan

$$\sim(\forall x. R \Rightarrow P) \equiv (\exists x. R \wedge \sim P)$$

$$\sim(\exists x. R \wedge P) \equiv (\forall x. R \Rightarrow \sim P)$$

- Singoletto

$$(\forall x. x=i \Rightarrow P) \equiv P[i/x]$$

$$(\exists x. x=i \wedge P) \equiv P[i/x]$$



NOTAZIONE PER GLI INTERVALLI

- Nelle dispense sono anche usate le seguenti abbreviazioni per un intervallo I , che noi eviteremo:
- $(\forall x \in I. Q) \cong (\forall x: x \in I. Q) \cong (\forall x. x \in I \Rightarrow Q)$
- $(\exists x \in I. Q(x)) \cong (\exists x: x \in I. Q) \cong (\exists x. x \in I \wedge Q)$



ALTRE LEGGI

- Sia k un elemento del dominio di interpretazione:

$$(\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} [(\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x]] & \text{se } P[k/x] \\ [(\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)] & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$

$$(\exists x.P \wedge Q) \equiv \begin{cases} [(\exists x.P \wedge x \neq k \wedge Q) \vee Q[k/x]] & \text{se } P[k/x] \\ [(\exists x.P \wedge x \neq k \wedge Q)] & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$



Mostriamo la legge per $(\forall x.P \Rightarrow Q)$

$$(\forall x.P \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \quad \{\text{Terzo escluso, Unità}\}$$

$$(\forall x.P \wedge (x=k \vee x \neq k) \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \quad \{\text{Distributività}\}$$

$$(\forall x.(P \wedge x=k) \vee (P \wedge x \neq k) \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \quad \{\text{Dominio}\}$$

$$(\forall x. P \wedge x=k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \quad \{\text{Leibniz}\}$$

$$(\forall x. P[k/x] \wedge x=k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \quad \{\mathbf{Ip}: P[k/x], \text{Unità}\}$$

$$(\forall x.x=k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \quad \{\text{Singoletto}\}$$

$$Q[k/x] \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \quad \{\mathbf{Ip}: \sim P[k/x], \text{zero}\}$$

$$(\forall x.\mathbf{F} \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \quad \{\mathbf{F} \Rightarrow Q \equiv \mathbf{T}, \text{costante, unità}\}$$

$$(\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

LEGGI PER GLI INTERVALLI(1)

$$(\forall x. x \in [a, b) \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} [(\forall x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } k \in [a, b) \\ (\forall x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } k \notin [a, b) \end{cases}$$

$$(\exists x. x \in [a, b) \wedge Q) \equiv \begin{cases} [(\exists x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \wedge Q) \vee Q[k/x] & \text{se } k \in [a, b) \\ (\exists x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \wedge Q) & \text{se } k \notin [a, b) \end{cases}$$



LEGGI PER GLI INTERVALLI (2)

$$(\forall x.x \in [a,b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x.x \in [a,b) \Rightarrow P) \wedge P[b/x]$$

se $[a,b]$ non è vuoto

$$(\forall x.x \in [a,b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x.x \in (a,b] \Rightarrow P) \wedge P[a/x]$$

se $[a,b]$ non è vuoto

$$(\exists x.x \in [a,b] \wedge P) \equiv (\exists x.x \in [a,b) \wedge P) \vee P[b/x]$$

se $[a,b]$ non è vuoto

$$(\exists x.x \in [a,b] \wedge P) \equiv (\exists x.x \in (a,b] \wedge P) \vee P[a/x]$$

se $[a,b]$ non è vuoto



SPECIFICHE

- Un array **a** è specificato come una funzione da un intervallo **[0, n)** ai numeri naturali
- Notazione: il valore *i*-esimo della funzione (array) **a** è indicato come **a[i]**
- Es: $a = \{ \langle 0, 45 \rangle, \langle 1, 23 \rangle, \langle 2, 10 \rangle, \langle 3, 16 \rangle \}$
 $a[2] = 10$



ESERCIZI DI FORMALIZZAZIONE

1. a è un array con tutti gli elementi ≥ 0
2. a rappresenta una funzione monotona strettamente crescente
3. m è il massimo dell'array a
4. i è l'indice del massimo dell'array a
5. l'array a ha un solo minimo locale
6. a ha tutti elementi distinti
7. b è l'array a ordinato in senso crescente

