LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2013-2014

Prima prova di verifica intermedia - 7/11/2013
Soluzioni proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Si provi che le seguenti proposizioni sono tautologie, senza usare le tabelle di verità né dimostrazioni per casi:

1. $\neg\big((\neg Q \vee P) \Rightarrow ((Q \vee R) \wedge \neg R)\big) \equiv (P \wedge R) \vee \neg Q$

Soluzione Partiamo dalla parte sinistra dell'equivalenza:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg\big((\neg Q \vee P) \Rightarrow ((Q \vee R) \wedge \neg R)\big) \\
\equiv & \quad \{(\neg\text{-}\Rightarrow)\} \\
 & (\neg Q \vee P) \wedge \neg((Q \vee R) \wedge \neg R) \\
\equiv & \quad \{\text{(DeMorgan), (doppia negazione)}\} \\
 & (\neg Q \vee P) \wedge (\neg(Q \vee R) \vee R) \\
\equiv & \quad \{\text{(DeMorgan), (doppia negazione)}\} \\
 & (\neg Q \vee P) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee R) \\
\equiv & \quad \{\text{(complemento)}\} \\
 & (\neg Q \vee P) \wedge (\neg Q \vee R) \\
\equiv & \quad \{\text{(distributività) al contrario}\} \\
 & \neg Q \vee (P \wedge R)
\end{array}
$$

2. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

Soluzione Vediamo tre possibili soluzioni, due delle quali usano ipotesi non tautologiche.

(1) Parto dall'intera formula, riducendola a T:

$$
\begin{array}{ll}
 & (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)) \\
\equiv & \quad \left\{ \begin{array}{l}\text{(eliminazione-}\Rightarrow\text{), due volte (se-} \\ \text{conda e quarta implicazione)}\end{array} \right\} \\
 & \neg(P \Rightarrow Q) \vee (\neg(Q \Rightarrow R) \vee (P \Rightarrow R)) \\
\equiv & \quad \{(\neg\text{-}\Rightarrow)\text{, due volte}\} \\
 & (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (P \Rightarrow R)) \\
\equiv & \quad \{\text{(eliminazione-}\Rightarrow\text{)}\} \\
 & (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee R)) \\
\equiv & \quad \{\text{(commutatività), (associatività)}\} \\
 & ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P) \vee ((Q \wedge \neg R) \vee R) \\
\equiv & \quad \{\text{(complemento), due volte}\} \\
 & \neg Q \vee \neg P \vee Q \vee R) \\
\equiv & \quad \{\text{(terzo escluso), (assorbimento)}\} \\
 & T
\end{array}
$$

(2) Dimostriamo la conseguenza $((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$ usando la premessa $(P \Rightarrow Q)$ come ipotesi. Poiché la conseguenza è un'implicazione, partiamo dalla sua premessa:

$$
\begin{array}{ll}
 & Q \Rightarrow R \\
\equiv & \quad \{\textbf{Ip: } P \Rightarrow Q\} \\
 & (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \\
\Rightarrow & \quad \{\text{(transitività)}\} \\
 & P \Rightarrow R
\end{array}
$$

(3) Anche la seguente dimostrazione, di un solo passo, è corretta:

$$
\begin{array}{ll}
 & Q \Rightarrow R \\
\Rightarrow & \quad \left\{ \begin{array}{l}\textbf{Ip: } Q \Leftarrow P,\ Q \text{ occorre in} \\ \text{contesto negativo}\end{array} \right\} \\
 & P \Rightarrow R
\end{array}
$$

ESERCIZIO 2
Per ognuna delle seguenti formule dire se si tratta di una tautologia oppure no. Se è una tautologia fornire una dimostrazione (non per casi) altrimenti fornire un controesempio.

1. $(R \Rightarrow P \wedge Q) \;\Rightarrow\; (R \wedge P \Rightarrow Q \vee P)$

   Soluzione Questa formula è una tautologia, perché la conseguenza è sempre vera:

   $$\begin{array}{ll} & R \wedge P \\ \Rightarrow & \{(\text{semplificazione-}\wedge)\} \\ & P \\ \Rightarrow & \{(\text{introduzione-}\vee)\} \\ & Q \vee P \end{array}$$

2. $(Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge P) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow R \wedge Q)$

   Soluzione La formula non è una tautologia, perché è falsa per l'assegnamento $\{Q \rightarrow F, R \rightarrow F, P \rightarrow T\}$, come mostrato dalla seguente tabella:

Q	R	P	$(Q$	$\wedge$	$R)$	$\vee$	$(\neg$	Q	$\wedge$	$P)$	$\Rightarrow$	$(P$	$\vee$	Q	$\Rightarrow$	R	$\wedge$	$Q)$
F	F	T	F	F	F	T	T	F	T	T	**F**	T	T	F	F	F	F	F
			(1)	(2)	(1)	(4)	(2)	(1)	(3)	(1)	**(5)**	(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(2)	(1)

ESERCIZIO 3
Per il seguente enunciato dichiarativo si fornisca un alfabeto del primo ordine, una corrispondente interpretazione sul dominio delle persone e una formula del primo ordine che lo formalizzi:

"Mario è zio di Lucia se è il fratello di sua madre o di suo padre"

Soluzione

Alfabeto

- $\mathbf{C} = \{Mario, Lucia\}$
- $\mathbf{F} = \{madre(\_), padre(\_)\}$
- $\mathbf{P} = \{zio(\_,\_), fratelli(\_,\_)\}$

- **Interpretazione**: $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$
  - $\mathbf{D} = \mathcal{P}$, con $\mathcal{P}$ insieme delle persone.
  - $\alpha(Mario) =$ "la persona chiamata Mario"
  - $\alpha(Lucia) =$ "la persona chiamata Lucia"
  - $\alpha(madre)(d) = d'$ se e solo se d' è la madre di d
  - $\alpha(padre)(d) = d'$ se e solo se d' è il padre di d
  - $\alpha(zio)(d, d') \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d è zio di d'
  - $\alpha(fratelli)(d, d') \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d e d' sono fratelli

L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo (si noti la direzione dell'implicazione):

$$zio(Mario, Lucia) \Leftarrow fratelli(Mario, madre(Lucia)) \vee fratelli(Mario, padre(Lucia))$$

Si noti che abbiamo considerato *madre* e *padre* come simboli di funzione unari. Alternativamente li si poteva introdurre come simboli di predicato binari. In questo caso nella soluzione l'insieme **F** è vuoto, mentre **P** contiene anche $madre(\_,\_), padre(\_,\_)$ con la seguente interpretazione:

- $\alpha(madre)(d, d')$ se e solo se d è la madre di d', e analogamente per *padre*.

L'enunciato può essere allora formalizzato nel seguente modo:

$$zio(Mario, Lucia) \Leftarrow (\exists x \,.\, fratelli(Mario, x) \wedge (madre(x, Lucia) \vee padre(x, Lucia)))$$

ESERCIZIO 4
Si formalizzi il seguente enunciato dichiarativo usando l'interpretazione standard sui naturali:

"Ci sono dei numeri pari maggiori di zero che non sono uguali alla somma di due numeri dispari diversi"

Soluzione

$$(\exists x \,.\, pari(x) \wedge x > 0 \wedge (\forall y \,.\, (\forall z \,.\, \neg(z = y) \Rightarrow \neg(x = y + z))))$$

ESERCIZIO 5
Calcolare, motivando la risposta, il valore di verità della formula

$$\Phi = (\exists x \,.\, R(x) \wedge (\forall y \,.\, S(y, x) \vee R(y)))$$

nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$ dove $D = \{*, \#, o\}$ ed α è definita come segue:

$$\alpha(R)(z) = \begin{cases} T & \text{se } z \in \{*, \#\}, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \alpha(S)(z, v) = \begin{cases} T & \text{se } (z, v) \in \{(*, *), (o, \#), (\#, *)\} \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare cioè $I_{\rho_0}(\Phi)$ usando le regole della semantica del prim'ordine, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.

Soluzione Presentiamo una soluzione informale.

Si chiede di valutare il valore di verità della formula $\Phi = (\exists x \,.\, R(x) \wedge (\forall y \,.\, S(y, x) \vee R(y)))$ nell'interpretazione data. Poiché si tratta di una quantificazione esistenziale, per la regola (S9) la formula è vera se e solo se esiste un valore d del dominio tale che sostituendo x con d si rende vera la formula $R(x) \wedge (\forall y \,.\, S(y, x) \vee R(y))$. Vediamo che per $d = \#$ la formula è vera, e quindi Φ è vera.
Infatti $R(\#) \wedge (\forall y \,.\, S(y, \#) \vee R(y))$ è una congiunzione e $R(\#)$ è vera, quindi rimane da vedere che $(\forall y \,.\, S(y, \#) \vee R(y))$ sia vera. Poiché è una quantificazione universale, per la regola (S8) è vera se e solo se la formula $S(y, \#) \vee R(y)$ è vera sostituendo y con ogni elemento in $\{*, \#, o\}$. Poiché è una disgiunzione basta che uno dei due argomenti sia vero. E infatti $R(*)$, $R(\#)$ e $S(o, \#)$ sono vere, e questo completa la dimostrazione.