LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE (A,B) - a.a. 2013-2014

Primo Appello [Es. 1-6] o Recupero II Compitino [Es. 3-6] - 16/01/2014

Soluzioni proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Si provi che la seguente proposizione è una tautologia, senza usare le tabelle di verità né dimostrazioni per casi:

$$(P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (Q \Rightarrow R \wedge S) \Rightarrow (P \wedge \neg S \Rightarrow R)$$

Soluzione Vediamo due possibili soluzioni, la prima delle quali usa ipotesi non tautologiche.

(1) Dimostriamo la conseguenza $(P \wedge \neg S \Rightarrow R)$ usando le premesse $(P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (Q \Rightarrow R \wedge S)$ come ipotesi. Poiché la conseguenza è un'implicazione, partiamo dalla sua premessa:

$$\begin{array}{ll} & P \wedge \neg S \\ \Rightarrow & \quad \{\textbf{Ip: } P \Rightarrow Q \vee R,\ P \text{ occorre positivamente}\} \\ & (Q \vee R) \wedge \neg S \\ \Rightarrow & \quad \{\textbf{Ip: } Q \Rightarrow R \wedge S,\ Q \text{ occorre positivamente}\} \\ & ((R \wedge S) \vee R) \wedge \neg S \\ \equiv & \quad \{\text{(assorbimento)}\} \\ & R \wedge \neg S \\ \Rightarrow & \quad \{\text{(semplificazione-}\wedge)\} \\ & R \end{array}$$

(2) Partiamo dalla premessa e riduciamola alla conseguenza, osservando che quest'ultima è equivalente (usando (eliminazione-$\Rightarrow$) e (De Morgan)) a $\neg P \vee S \vee R$:

$$\begin{array}{ll} & (P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (Q \Rightarrow R \wedge S) \\ \equiv & \quad \{\text{(eliminazione-}\Rightarrow\text{) due volte}\} \\ & (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee (R \wedge S)) \\ \Rightarrow & \quad \{\text{(risoluzione)}\} \\ & \neg P \vee R \vee (R \wedge S) \\ \equiv & \quad \{\text{(assorbimento)}\} \\ & \neg P \vee R \\ \Rightarrow & \quad \{\text{(introduzione-}\vee)\} \\ & \neg P \vee S \vee R \end{array}$$

ESERCIZIO 2

Calcolare, motivando la risposta, il valore di verità della formula

$$\Phi = (\forall x\,.\,R(x) \vee (\exists y\,.\,S(y,x) \wedge R(y)))$$

nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$ dove $D = \{*, \#, o\}$ ed α è definita come segue:

$$\alpha(R)(z) = \begin{cases} T & \text{se } z \in \{*, \#\}, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \alpha(S)(z,v) = \begin{cases} T & \text{se } (z,v) \in \{(*,*),(\#,o),(\#,*)\}, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare cioè $I_{\rho_0}(\Phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.

Soluzione Presentiamo una soluzione informale.

Si chiede di valutare il valore di verità della formula $\Phi = (\forall x\,.\,R(x) \vee (\exists y\,.\,S(y,x) \wedge R(y)))$ nell'interpretazione data. Poiché si tratta di una quantificazione universale, per la regola (S8) la formula è vera se e solo se per ogni valore d del dominio, sostituendo x con d si rende vera la formula $\Psi = R(x) \vee (\exists y\,.\,S(y,x) \wedge R(y))$. Si vede facilmente che le formule $\Psi[^*/_x]$ e $\Psi[^\#/_x]$ sono vere, perché si tratta di disgiunzioni e sia $R(*)$ che $R(\#)$ sono vere per definizione.
Analizziamo la formula $\Psi[^o/_x] = R(o) \vee (\exists y\,.\,S(y,o) \wedge R(y))$. Poiché $R(o)$ è falsa, $\Psi[^o/_x]$ è vera solo se lo è la formula esistenziale $(\exists y\,.\,S(y,o) \wedge R(y))$. Quest'ultima è vera se esiste un valore d' del dominio che sostituito a y rende vera la formula $S(y,o) \wedge R(y)$. Consideriamo $d' = \#$: abbiamo che sia $S(\#,o)$ che $R(\#)$ sono vere per le rispettive definizioni. Quindi possiamo concludere che $\Psi[^o/_x]$ è vera, e di conseguenza la formula originale Φ è vera.

ESERCIZIO 3
Si provi che la seguente formula è valida (P, Q, R e S contengono la variabile libera x):

$$\neg(\exists x \,.\, P \wedge \neg R) \;\wedge\; (\exists x \,.\, P) \;\wedge\; (\forall x \,.\, R \Rightarrow Q \wedge S) \;\Rightarrow\; \neg(\forall x \,.\, \neg Q \wedge S)$$

Soluzione Applicando le leggi di De Morgan sia nella prima premessa che nella conseguenza, la formula è equivalente alla seguente:

$$(\forall x \,.\, \neg P \vee R) \;\wedge\; (\exists x \,.\, P) \;\wedge\; (\forall x \,.\, R \Rightarrow Q \wedge S) \;\Rightarrow\; (\exists x \,.\, Q \vee \neg S)$$

Per la regola di Skolemizzazione, è sufficiente dimostrare (con a nuova costante) che:

$$(\forall x \,.\, \neg P \vee R) \;\wedge\; (\exists x \,.\, P) \;\wedge\; P[^a/_x] \;\wedge\; (\forall x \,.\, R \Rightarrow Q \wedge S) \;\Rightarrow\; (\exists x \,.\, Q \vee \neg S)$$

Partiamo dalla premessa:

$(\forall x \,.\, \neg P \vee R) \;\wedge\; (\exists x \,.\, P) \;\wedge\; P[^a/_x] \;\wedge\; (\forall x \,.\, R \Rightarrow Q \wedge S)$

$\Rightarrow$ {(elim-$\forall$) due volte, occorrenze positive}

$(\neg P \vee R)[^a/_x] \;\wedge\; (\exists x \,.\, P) \;\wedge\; P[^a/_x] \;\wedge\; (R \Rightarrow Q \wedge S)[^a/_x]$

$\Rightarrow$ {(sempl.-$\wedge$), occorrenza positiva}

$(\neg P \vee R)[^a/_x] \;\wedge\; P[^a/_x] \;\wedge\; (R \Rightarrow Q \wedge S)[^a/_x]$

$\equiv$ {sostituzione}

$(\neg P[^a/_x] \vee R[^a/_x]) \;\wedge\; P[^a/_x] \;\wedge\; (R[^a/_x] \Rightarrow Q[^a/_x] \wedge S[^a/_x])$

$\equiv$ {(complemento)}

$R[^a/_x] \wedge P[^a/_x] \wedge (R[^a/_x] \Rightarrow Q[^a/_x] \wedge S[^a/_x])$

$\Rightarrow$ {(Modus Ponens), occorrenza positiva}

$P[^a/_x] \wedge Q[^a/_x] \wedge S[^a/_x]$

$\Rightarrow$ {(sempl.-$\wedge$), occorrenza positiva}

$Q[^a/_x]$

$\Rightarrow$ {(intro.-$\vee$), occorrenza positiva}

$Q[^a/_x] \vee \neg S[^a/_x]$

$\Rightarrow$ {(intro.-$\exists$), occorrenza positiva}

$(\exists x \,.\, Q \vee \neg S)$

ESERCIZIO 4
Assumendo **a: array [0, n) of nat** con $n > 0$ si formalizzi il seguente enunciato:

"Nell'array **a** c'è un solo elemento in posizione pari
che è maggiore della somma degli elementi in posizione dispari che lo seguono."

Soluzione

$$\#\{k : k \in [0,n) \mid \mathit{pari}(k) \wedge \mathbf{a}[k] > \big(\Sigma i : i \in (k,n) \wedge \mathit{dispari}(i) \,.\, \mathbf{a}[i]\big)\} = 1$$

ESERCIZIO 5
Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **a: array [0, n) of int**):

$$\{k > 0 \ \wedge \ x \in [0,n) \ \wedge \ (\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow a[i] \leq k)\}$$
$$\textbf{if } a[x] > k \textbf{ then } a[x] := 0 \textbf{ else skip fi}$$
$$\{(\forall i \,.\, i \in [0,x] \Rightarrow a[i] \leq k)\}$$

Soluzione. Applicando la regola (COND), dobbiamo verificare l'implicazione (1) e le triple (2) e (3):

(1) $k > 0 \ \wedge \ x \in [0,n) \ \wedge \ (\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow a[i] \leq k) \ \Rightarrow \ def(a[x] > k)$

(2) $\{k > 0 \ \wedge \ x \in [0,n) \ \wedge \ (\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow a[i] \leq k) \ \wedge \ a[x] > k\}$
$a[x] := 0$
$\{(\forall i \,.\, i \in [0,x] \Rightarrow a[i] \leq k)\}$

(3) $\{k > 0 \ \wedge \ x \in [0,n) \ \wedge \ (\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow a[i] \leq k) \ \wedge \ \neg(a[x] > k)\}$
skip
$\{(\forall i \,.\, i \in [0,x] \Rightarrow a[i] \leq k)\}$

Per la (1), partiamo dalla conseguenza:
$def(a[x] > k)$
$\equiv$ {definizione di *def*, **Ip:** $dom(a) = [0,n)$, $x \in [0,n)$}
T

Per la (2), per l'assioma dell'aggiornamento selettivo e la regola (PRE) è sufficiente dimostrare la seguente implicazione, dove $a' = a\left[{}^{0}/_{x}\right]$:

$$k > 0 \ \wedge \ x \in [0,n) \ \wedge \ (\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow a[i] \leq k) \ \wedge \ a[x] > k \ \Rightarrow$$
$$def(x) \ \wedge \ def(0) \ \wedge \ x \in dom(a) \ \wedge \ (\forall i \,.\, i \in [0,x] \Rightarrow a[i] \leq k)[{}^{a'}/_{a}]$$

Partiamo dalla conseguenza:
$def(x) \ \wedge \ def(0) \ \wedge \ x \in dom(a) \ \wedge \ (\forall i \,.\, i \in [0,x] \Rightarrow a[i] \leq k)[{}^{a'}/_{a}]$
$\equiv$ {definizione di *def*, $dom(a) = [0,n)$, **Ip:** $x \in [0,n)$, sostituzione}
$(\forall i \,.\, i \in [0,x] \Rightarrow a'[i] \leq k)$
$\equiv$ {(intervallo-$\forall$)}
$(\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow a'[i] \leq k) \ \wedge \ a'[x] \leq k$
$\equiv$ $\left\{\textbf{Ip: } a' = a\left[{}^{0}/_{x}\right],\ x \notin [0,x)\right\}$
$(\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow a[i] \leq k) \ \wedge \ a'[x] \leq k$
$\equiv$ {**Ip:** $(\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow a[i] \leq k)$, unità}
$a'[x] \leq k$
$\equiv$ {definizione di a'}
$0 \leq k$
$\equiv$ {**Ip:** $k > 0$}
T

Infine per la (3), applicando la regola (SKIP) dobbiamo dimostrare che la seguente implicazione è verificata:

$$k > 0 \ \wedge \ x \in [0,n) \ \wedge \ (\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow a[i] \leq k) \ \wedge \ \neg(a[x] > k) \ \Rightarrow \ (\forall i \,.\, i \in [0,x] \Rightarrow a[i] \leq k)$$

Partiamo come al solito dalla conseguenza:
$(\forall i \,.\, i \in [0,x] \Rightarrow a[i] \leq k)$
$\equiv$ {(intervallo-$\forall$)}
$(\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow a[i] \leq k) \ \wedge \ a[x] \leq k$
$\equiv$ {**Ip:** $(\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow a[i] \leq k)$, unità}
$a[x] \leq k \quad \equiv \{\textbf{Ip} : \neg(a[x] > k)\}$ **T**

ESERCIZIO 6
Si assuma che il linguaggio di programmazione introdotto a lezione sia esteso con un operatore binario **max**, che applicato a due valori interi restituisce il massimo fra i due, e tale che $def(\mathbf{max}(E_1, E_2)) \equiv def(E_1) \wedge def(E_2)$. Si consideri il seguente programma annotato, dove **a: array [0, n) of int**:

$\{n > 0\}$
  $w := a[0]$; $x := 1$;
$\{\mathsf{Inv}: x \in [1, n] \ \wedge \ w = (max\ i : i \in [0, x)\,.\,a[i])\}\{\mathrm{t}: n - x\}$
  while $(x < n)$ **do**
    $w := \mathbf{max}(w, a[x])$; $x := x + 1$
  endw
$\{w = (max\ i : i \in [0, n)\,.\,a[i])\}$

Scrivere e dimostrare l'ipotesi di invarianza.

Soluzione. L'ipotesi di invarianza è la seguente tripla:

$\{x \in [1, n] \ \wedge \ w = (max\ i : i \in [0, x)\,.\,a[i]) \ \wedge \ x < n\}$
  $w = \mathbf{max}(w, a[x])$; $x := x + 1$
$\{x \in [1, n] \ \wedge \ w = (max\ i : i \in [0, x)\,.\,a[i]) \ \wedge \ def(x < n)\}$

Trattandosi di una sequenza di comandi, per la regola (SEQ) dobbiamo trovare un'asserzione R che permetta di verificare le due triple seguenti:

(1) $\{x \in [1, n] \ \wedge \ w = (max\ i : i \in [0, x)\,.\,a[i]) \ \wedge \ x < n\}$
  $w = \mathbf{max}(w, a[x])$
  $\{R\}$

(2) $\{R\}$
  $x := x + 1$
  $\{x \in [1, n] \ \wedge \ w = (max\ i : i \in [0, x)\,.\,a[i]) \ \wedge \ def(x < n)\}$

Cominciamo dalla (2): applicando l'assioma (ASS) la tripla è verificata per
$R \ \equiv \ def(x + 1) \ \wedge \ \big(x \in [1, n] \ \wedge \ w = (max\ i : i \in [0, x)\,.\,a[i]) \ \wedge \ def(x < n)\big)[^{x+1}/_{x}]$
Applicando la sostituzione e semplificando otteniamo
$R \ \equiv \ x + 1 \in [1, n] \ \wedge \ w = (max\ i : i \in [0, x]\,.\,a[i])$
Quindi la tripla (1) diventa:

$\{x \in [1, n] \ \wedge \ w = (max\ i : i \in [0, x)\,.\,a[i]) \ \wedge \ x < n\}$
  $w = \mathbf{max}(w, a[x])$
$\{x + 1 \in [1, n] \ \wedge \ w = (max\ i : i \in [0, x]\,.\,a[i])\}$

Per la regola (ASS), è sufficiente dimostrare la seguente implicazione:

$$x \in [1, n] \ \wedge \ w = (max\ i : i \in [0, x)\,.\,a[i]) \ \wedge \ x < n \Rightarrow$$
$$def(\mathbf{max}(w, a[x])) \ \wedge \ \big(w = (max\ i : i \in [0, x]\,.\,a[i])\}\big)[^{\mathbf{max}(w,a[x])}/_{w}]$$

Partiamo dalla conseguenza, applicando la sostituzione e semplificandola:
  $def(a[x]) \ \wedge \ \mathbf{max}(w, a[x]) = (max\ i : i \in [0, x]\,.\,a[i])$
$\equiv$ {**Ip:** $x \in [1, n] \ \wedge \ x < n$, $dom(a) = [0, n)$, unità}
  $\mathbf{max}(w, a[x]) = (max\ i : i \in [0, x]\,.\,a[i])$
$\equiv$ {(intervallo-max)}
  $\mathbf{max}(w, a[x]) = (max\ i : i \in [0, x)\,.\,a[i])\ max\ a[x]$
$\equiv$ {**Ip:** $w = (max\ i : i \in [0, x)\,.\,a[i])$}
  $\mathbf{max}(w, a[x]) = w\ max\ a[x]$
$\equiv$ {definizione di **max**}
  T