LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE (A,B) - a.a. 2013-2014

Secondo Appello - 05/02/2014

Soluzioni proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1
Si provi che la seguente proposizione è una tautologia, senza usare le tabelle di verità né dimostrazioni per casi:

$$\neg(S \vee (R \wedge \neg P)) \;\Rightarrow\; \neg(S \vee Q) \vee (Q \wedge (R \Rightarrow P))$$

Soluzione Cominciamo col semplificare la formula, spostando le negazioni verso l'interno:

$\neg(S \vee (R \wedge \neg P)) \;\Rightarrow\; \neg(S \vee Q) \vee (Q \wedge (R \Rightarrow P))$

$\equiv$ {(De Morgan), varie volte}

$\neg S \wedge (\neg R \vee P) \;\Rightarrow\; (\neg S \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge (R \Rightarrow P))$

$\equiv$ {(elim-$\Rightarrow$), al contrario}

$\neg S \wedge (R \Rightarrow P) \;\Rightarrow\; (\neg S \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge (R \Rightarrow P))$

Dimostriamo la formula ottenuta partendo dalla conseguenza, usando le premesse come ipotesi non tautologiche:

$(\neg S \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge (R \Rightarrow P))$

$\equiv$ {**Ip:** $\neg S$, unità}

$\neg Q \vee (Q \wedge (R \Rightarrow P))$

$\equiv$ {**Ip:** $(R \Rightarrow P)$, unità}

$\neg Q \vee Q$

$\equiv$ {(terzo escluso)}

T

ESERCIZIO 2
Calcolare, motivando la risposta, il valore di verità della formula

$$\Phi = (\forall z \,.\, K(z)) \vee (\forall y \,.\, (\exists x \,.\, Z(x,y) \wedge K(x)))$$

nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$ dove $D = \{*, o, \#\}$ ed α è definita come segue:

$$\alpha(K)(z) = \begin{cases} T & \text{se } z \in \{*, \#\}, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \alpha(Z)(z,v) = \begin{cases} T & \text{se } (z,v) \in \{(*,*),(\#,o),(\#,*),(o,\#)\}, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare cioè $I_{\rho_0}(\Phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.

Soluzione Presentiamo una soluzione informale.

Si chiede di valutare il valore di verità della formula $\Phi = (\forall z \,.\, K(z)) \vee (\forall y \,.\, (\exists x \,.\, Z(x,y) \wedge K(x)))$ nell'interpretazione data. Trattandosi della disgiunzione di due formule, essa è vera se lo è almeno una delle due (regola (S5)). La prima formula $(\forall z \,.\, K(z))$ è una quantificazione universale, quindi per la regola (S8) essa è vera se e solo se sostituendo a z un qualunque valore d la formula $K(z)$ diventa vera, ovvero $\alpha(K)(d)$ è vera. Ma dalla definizione di K vediamo che $\alpha(K)(o)$ è falsa, quindi $(\forall z \,.\, K(z))$ è falsa. Anche la seconda formula $(\forall y \,.\, (\exists x \,.\, Z(x,y) \wedge K(x)))$ è una quantificazione universale, quindi è vera se e solo se per ogni valore d del dominio, sostituendo y con d si rende vera la formula $\Psi = (\exists x \,.\, Z(x,y) \wedge K(x))$.
In particolare, deve essere vera assegnando $\#$ a y. Poiché $(\exists x \,.\, Z(x,y) \wedge K(x))$ è una quantificazione esistenziale, per la regola (S9) è vera se esiste un ulteriore valore d' del dominio che sostituito a x rende vera la formula $Z(x,y) \wedge K(x)$. Ma questo non è possibile perché $\alpha(K)(o)$ è falsa, e $\alpha(Z)(d', \#)$ é falsa per $d' \neq o$. Ne consegue che la formula Φ è falsa nell'interpretazione data.

ESERCIZIO 3
Si provi che la seguente formula è valida (P, Q e R contengono la variabile libera x):

$$\neg\big((\exists x\,.\,P \vee Q) \wedge (\exists x\,.\,R)\big) \wedge (\forall x\,.\,P) \;\Rightarrow\; (\forall x\,.\,R \Rightarrow Q)$$

Soluzione Iniziamo dalla premessa, riducendola alla conseguenza:

$\neg\big((\exists x\,.\,P \vee Q) \wedge (\exists x\,.\,R)\big) \wedge (\forall x\,.\,P)$
$\equiv$ {(De Morgan)}
$\big(\neg(\exists x\,.\,P \vee Q) \vee \neg(\exists x\,.\,R)\big) \wedge (\forall x\,.\,P)$
$\equiv$ {(De Morgan), più volte}
$((\forall x\,.\,\neg P \wedge \neg Q) \vee (\forall x\,.\,\neg R)) \wedge (\forall x\,.\,P)$
$\Rightarrow$ {$(\forall : \vee)$, occorrenza positiva}
$(\forall x\,.\,(\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg R) \wedge (\forall x\,.\,P)$
$\Rightarrow$ {(semplificazione-$\wedge$), occorrenza positiva}
$(\forall x\,.\,\neg P \vee \neg R) \wedge (\forall x\,.\,P)$
$\equiv$ {$(\forall : \wedge)$}
$(\forall x\,.\,(\neg P \vee \neg R) \wedge P)$
$\equiv$ {(complemento)}
$(\forall x\,.\,\neg R \wedge P)$
$\Rightarrow$ {(semplificazione-$\wedge$), occorrenza positiva}
$(\forall x\,.\,\neg R)$
$\Rightarrow$ {(introduzione-$\vee$), occorrenza positiva}
$(\forall x\,.\,\neg R \vee Q)$
$\equiv$ {(eliminazione-$\Rightarrow$), al contrario}
$(\forall x\,.\,R \Rightarrow Q)$

ESERCIZIO 4
Assumendo **a,b: array [0, n) of nat** con $n > 0$ si formalizzi il seguente enunciato:

"La somma degli elementi con lo stesso indice degli array **a** e **b** è costante,
e ci sono esattamente due elementi di **b** che sono maggiori della somma di tutti gli elementi di **a**."

Soluzione

$$\big(\exists k\,.\,(\forall i\,.\,i \in [0,n) \Rightarrow \mathbf{a}[i] + \mathbf{b}[i] = k)\big) \;\wedge\; \#\{j : j \in [0,n) \mid \mathbf{b}[j] > (\Sigma k : k \in [0,n)\,.\,\mathbf{a}[k])\} = 2$$

ESERCIZIO 5
Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **a: array [0, n) of int**):

$\{x \in [1,n) \;\wedge\; (\forall i\,.\,i \in [0,x) \Rightarrow a[i] = n - i)\}$
if not$(a[x] = n - x)$ **then** $a[x] := a[x-1] - 1$ **else skip fi**
$\{(\forall i\,.\,i \in [0,x] \Rightarrow a[i] = n - i)\}$

Soluzione. Applicando la regola (COND), dobbiamo verificare l'implicazione (1) e le triple (2) e (3):

(1) $x \in [1,n) \;\wedge\; (\forall i\,.\,i \in [0,x) \Rightarrow a[i] = n - i) \;\Rightarrow\; \mathit{def}(\mathbf{not}(a[x] = n - x))$

(2) $\{x \in [1,n) \;\wedge\; (\forall i\,.\,i \in [0,x) \Rightarrow a[i] = n - i) \;\wedge\; \mathbf{not}(a[x] = n - x)\}$
$a[x] := a[x-1] - 1$
$\{(\forall i\,.\,i \in [0,x] \Rightarrow a[i] = n - i)\}$

(3) $\{x \in [1,n) \;\wedge\; (\forall i\,.\,i \in [0,x) \Rightarrow a[i] = n - i) \;\wedge\; \neg(\mathbf{not}(a[x] = n - x))\}$
skip
$\{(\forall i\,.\,i \in [0,x] \Rightarrow a[i] = n - i)\}$

Per la (1), partiamo dalla conseguenza:

$\quad$ $\mathit{def}(\mathbf{not}(a[x] = n - x))$

$\equiv$ $\quad$ {definizione di def (più volte), unità}

$\quad$ $\mathit{def}(a[x])$

$\equiv$ $\quad$ {definizione di def, unità}

$\quad$ $x \in \mathit{dom}(a)$

$\equiv$ $\quad$ {**Ip:** $\mathit{dom}(a) = [0, n)$, $x \in [1, n)$}

$\quad$ $\mathbf{T}$

Per la (2), il comando è un aggiornamento selettivo. Applicando l'assioma (AGG-SEL) al comando e alla postcondizione, otteniamo che la seguente tripla è automaticamente verificata:

(4) $\quad \{\mathit{def}(x) \ \wedge \ \mathit{def}(a[x-1]-1) \ \wedge \ x \in \mathit{dom}(a) \ \wedge \ (\forall i \,.\, i \in [0, x] \Rightarrow a[i] = n - i)[^{b}/_{a}]\}$

$\quad\quad a[x] := a[x-1] - 1$

$\quad \{(\forall i \,.\, i \in [0, x] \Rightarrow a[i] = n - i)\}$

dove l'array b è definito come $b = a\left[^{a[x-1]-1}/_{x}\right]$. Applicando ora la regola (PRE), otteniamo che la tripla (2) è verificata se la sua precondizione implica la precondizione della (4), cioè se vale:

$$x \in [1, n) \ \wedge \ (\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow a[i] = n - i) \ \wedge \ \mathbf{not}(a[x] = n - x) \ \Rightarrow$$
$$\mathit{def}(x) \ \wedge \ \mathit{def}(a[x-1]-1) \ \wedge \ x \in \mathit{dom}(a) \ \wedge \ (\forall i \,.\, i \in [0, x] \Rightarrow a[i] = n - i)[^{b}/_{a}]$$

Partiamo dalla conseguenza usando le premesse come ipotesi:

$\quad$ $\mathit{def}(x) \ \wedge \ \mathit{def}(a[x-1]-1) \ \wedge \ x \in \mathit{dom}(a) \ \wedge \ (\forall i \,.\, i \in [0, x] \Rightarrow a[i] = n - i)[^{b}/_{a}]$

$\equiv$ $\quad$ {definizione di def, unità, sostituzione}

$\quad$ $x - 1 \in \mathit{dom}(a) \ \wedge \ x \in \mathit{dom}(a) \ \wedge \ (\forall i \,.\, i \in [0, x] \Rightarrow b[i] = n - i)$

$\equiv$ $\quad$ {**Ip:** $\mathit{dom}(a) = [0, n)$, $x \in [1, n)$}

$\quad$ $(\forall i \,.\, i \in [0, x] \Rightarrow b[i] = n - i)$

$\equiv$ $\quad$ {(intervallo-$\forall$)}

$\quad$ $(\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow b[i] = n - i) \ \wedge \ b[x] = n - x$

$\equiv$ $\quad$ $\left\{\mathbf{Ip:}\ b = a\left[^{a[x-1]-1}/_{x}\right],\ x \notin [0, x)\right\}$

$\quad$ $(\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow a[i] = n - i) \ \wedge \ a[x-1] - 1 = n - x$

$\equiv$ $\quad$ {**Ip:** $(\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow a[i] = n - i)$}

$\quad$ $\mathbf{T} \ \wedge \ (n - (x-1)) - 1 = n - x$

$\equiv$ $\quad$ {(unità), calcolo}

$\quad$ $\mathbf{T}$

Infine per la (3), applicando la regola (SKIP) dobbiamo dimostrare che la seguente implicazione è verificata:

$$x \in [1, n) \ \wedge \ (\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow a[i] = n - i) \ \wedge \ \neg(\mathbf{not}(a[x] = n - x)) \ \Rightarrow$$
$$(\forall i \,.\, i \in [0, x] \Rightarrow a[i] = n - i)$$

Partiamo come al solito dalla conseguenza:

$\quad$ $(\forall i \,.\, i \in [0, x] \Rightarrow a[i] = n - i)$

$\equiv$ $\quad$ {(intervallo-$\forall$)}

$\quad$ $(\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow a[i] = n - i) \ \wedge \ a[x] = n - x$

$\equiv$ $\quad$ {**Ip:** $(\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow a[i] = n - i)$, unità}

$\quad$ $a[x] = n - x$

$\equiv$ $\quad$ {**Ip:** $\neg(\mathbf{not}(a[x] = n - x))$, quindi $a[x] = n - x$}

$\quad$ $\mathbf{T}$

ESERCIZIO 6
Si consideri il seguente programma annotato:

$\{n > 0\}$
  $s := 0\ ;\ x := 0\ ;$
$\{\mathsf{Inv}:\ x \in [0,n]\ \wedge\ s = \big(\Sigma i : i \in [0,x)\,.\,2^i\big)\}\{\mathrm{t}:\ n - x\}$
  while $(x < n)$ **do**
    $s := 2 * s + 1\ ;\ x := x + 1$
  endw
$\{s = \big(\Sigma i : i \in [0,n)\,.\,2^i\big)\}$

Scrivere e dimostrare l'ipotesi di invarianza.

Soluzione. L'ipotesi di invarianza è la seguente tripla:

$\{x \in [0,n]\ \wedge\ s = \big(\Sigma i : i \in [0,x)\,.\,2^i\big)\ \wedge\ x < n\}$
  $s := 2 * s + 1\ ;\ x := x + 1$
$\{x \in [0,n]\ \wedge\ s = \big(\Sigma i : i \in [0,x)\,.\,2^i\big)\ \wedge\ \mathit{def}(x < n)\}$

Trattandosi di una sequenza di comandi, per la regola (SEQ) dobbiamo trovare un'asserzione R che permetta di verificare le due triple seguenti:

(1) $\{x \in [0,n]\ \wedge\ s = \big(\Sigma i : i \in [0,x)\,.\,2^i\big)\ \wedge\ x < n\}$
  $s := 2 * s + 1$
  $\{R\}$

(2) $\{R\}$
  $x := x + 1$
  $\{x \in [0,n]\ \wedge\ s = \big(\Sigma i : i \in [0,x)\,.\,2^i\big)\ \wedge\ \mathit{def}(x < n)\}$

Cominciamo dalla (2): applicando l'assioma (ASS) la tripla è verificata per
$R\ \equiv\ \mathit{def}(x+1)\ \wedge\ \big(x \in [0,n]\ \wedge\ s = \big(\Sigma i : i \in [0,x)\,.\,2^i\big)\ \wedge\ \mathit{def}(x < n)\big)[^{x+1}/_x]$
Applicando la sostituzione e semplificando otteniamo
$R\ \equiv\ x + 1 \in [0,n]\ \wedge\ s = (\Sigma i : i \in [0,x]\,.\,2^i)$
Quindi la tripla (1) diventa:

$\{x \in [0,n]\ \wedge\ s = \big(\Sigma i : i \in [0,x)\,.\,2^i\big)\ \wedge\ x < n\}$
  $s := 2 * s + 1$
$\{x + 1 \in [0,n]\ \wedge\ s = (\Sigma i : i \in [0,x]\,.\,2^i)\}$

Per la regola (ASS), è sufficiente dimostrare la seguente implicazione:

$$x \in [0,n]\ \wedge\ s = \big(\Sigma i : i \in [0,x)\,.\,2^i\big)\ \wedge\ x < n\ \Rightarrow$$
$$\mathit{def}(2 * s + 1)\ \wedge\ \big(x + 1 \in [0,n]\ \wedge\ s = (\Sigma i : i \in [0,x]\,.\,2^i)\big)[^{2*s+1}/_s]$$

Partiamo dalla conseguenza, applicando la sostituzione e semplificandola:
  $x + 1 \in [0,n]\ \wedge\ 2 * s + 1 = (\Sigma i : i \in [0,x]\,.\,2^i)$
$\equiv$ $\{$**Ip:** $x \in [1,n]\ \wedge\ x < n$, unità$\}$
  $2 * s + 1 = (\Sigma i : i \in [0,x]\,.\,2^i)$
$\equiv$ $\big\{$**Ip:** $s = (\Sigma i : i \in [0,x)\,.\,2^i)\big\}$
  $2 * (\Sigma i : i \in [0,x)\,.\,2^i) + 1 = (\Sigma i : i \in [0,x]\,.\,2^i)$
$\equiv$ $\{$calcolo$\}$
  $(\Sigma i : i \in [0,x)\,.\,2^{i+1}) + 1 = (\Sigma i : i \in [0,x]\,.\,2^i)$
$\equiv$ $\big\{$calcolo, $1 = 2^0\big\}$
  $(\Sigma i : i \in (0,x]\,.\,2^i) + 2^0 = (\Sigma i : i \in [0,x]\,.\,2^i)$
$\equiv$ $\{$(intervallo-Σ), applicato all'estremo sinistro$\}$
  T