LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE (A,B) - a.a. 2013-2014
Secondo Appello - 05/02/2014

Attenzione: Scrivere **nome**, **cognome**, **matricola** e **corso** in alto a destra su ogni foglio che si consegna.

ESERCIZIO 1
Si provi che la seguente proposizione è una tautologia, senza usare le tabelle di verità né dimostrazioni per casi:

$$\neg(S \vee (R \wedge \neg P)) \ \Rightarrow\ \neg(S \vee Q) \vee (Q \wedge (R \Rightarrow P))$$

ESERCIZIO 2
Calcolare, motivando la risposta, il valore di verità della formula

$$\Phi = (\forall z \,.\, K(z)) \vee (\forall y \,.\, (\exists x \,.\, Z(x,y) \wedge K(x)))$$

nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$ dove $D = \{*, o, \#\}$ ed α è definita come segue:

$$\alpha(K)(z) = \begin{cases} T & \text{se } z \in \{*, \#\}, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \alpha(Z)(z,v) = \begin{cases} T & \text{se } (z,v) \in \{(*,*), (\#,o), (\#,*), (o,\#)\}, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare cioè $I_{\rho_0}(\Phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.

ESERCIZIO 3
Si provi che la seguente formula è valida (P, Q e R contengono la variabile libera x):

$$\neg\big((\exists x \,.\, P \vee Q) \wedge (\exists x \,.\, R)\big) \wedge (\forall x \,.\, P) \ \Rightarrow\ (\forall x \,.\, R \Rightarrow Q)$$

ESERCIZIO 4
Assumendo **a,b: array [0, n) of nat** con $n > 0$ si formalizzi il seguente enunciato:

"La somma degli elementi con lo stesso indice degli array **a** e **b** è costante,
e ci sono esattamente due elementi di **b** che sono maggiori della somma di tutti gli elementi di **a**."

ESERCIZIO 5
Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **a: array [0, n) of int**):

$\{x \in [1, n) \ \wedge\ (\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow a[i] = n - i)\}$
  if not$(a[x] = n - x)$
    then $a[x] := a[x-1] - 1$
    else skip
  fi
$\{(\forall i \,.\, i \in [0, x] \Rightarrow a[i] = n - i)\}$

ESERCIZIO 6
Si consideri il seguente programma annotato:

$\{n > 0\}$
  $s := 0 \ ;\ x := 0 \ ;$
$\{\mathsf{Inv} : x \in [0, n] \ \wedge\ s = \big(\Sigma i : i \in [0, x) \,.\, 2^i\big)\}\{\text{t: } n - x\}$
  while $(x < n)$ **do**
    $s := 2 * s + 1 \ ;\ x := x + 1$
  endw
$\{s = \big(\Sigma i : i \in [0, n) \,.\, 2^i\big)\}$

Scrivere e dimostrare l'ipotesi di invarianza.