LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2013-2014

Esercitazione del 31/10/2013

Soluzioni proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Si provi che le seguenti proposizioni sono tautologie, senza usare le tabelle di verità:

1. $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \wedge \neg R \quad \equiv \quad (P \vee R) \Rightarrow \neg(Q \vee R)$

Soluzione Semplifichiamo separatamente la parte sinistra e la parte destra dell'equivalenza:

$$\begin{array}{ll}
& ((P \wedge Q) \Rightarrow R) \wedge \neg R \\
\equiv & \quad \{ \text{(eliminazione-}\Rightarrow\text{)} \} \\
& (\neg(P \wedge Q) \vee R) \wedge \neg R \\
\equiv & \quad \{ \text{(complemento)} \} \\
& \neg(P \wedge Q) \wedge \neg R \\
\equiv & \quad \{ \text{(De Morgan)} \} \\
& (\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg R \\
\equiv & \quad \{ \text{(distributività)} \} \\
& (\neg P \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge \neg R) \quad (1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
& (P \vee R) \Rightarrow \neg(Q \vee R) \\
\equiv & \quad \{ \text{(eliminazione-}\Rightarrow\text{)} \} \\
& \neg(P \vee R) \vee \neg(Q \vee R) \\
\equiv & \quad \{ \text{(De Morgan), due volte} \} \\
& (\neg P \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge \neg R) \quad (2)
\end{array}$$

Poiché le formule (1) e (2) coincidono abbiamo dimostrato la tautologia. Si noti che abbiamo ridotto entrambi i membri dell'equivalenza a una forma normale disgiuntiva.

2. $\neg P \wedge (R \Rightarrow \neg(P \Rightarrow Q)) \quad \Rightarrow \quad \neg R$

Soluzione Vediamo due possibili soluzioni, la seconda delle quali usa ipotesi non tautologiche.

(1) Parto dalla premessa:

$$\begin{array}{ll}
& \neg P \wedge (R \Rightarrow \neg(P \Rightarrow Q)) \\
\equiv & \quad \{ \text{(eliminazione-}\Rightarrow\text{)} \} \\
& \neg P \wedge (\neg R \vee \neg(P \Rightarrow Q)) \\
\equiv & \quad \{ (\neg\text{-}\Rightarrow) \} \\
& \neg P \wedge (\neg R \vee ((P \wedge Q)) \\
\equiv & \quad \{ \text{(distributività)} \} \\
& (\neg P \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge P \wedge Q) \\
\equiv & \quad \{ \text{(contraddizione)} \} \\
& (\neg P \wedge \neg R) \vee (F \wedge Q) \\
\equiv & \quad \{ \text{(zero) e (unità)} \} \\
& \neg P \wedge \neg R \\
\Rightarrow & \quad \{ \text{(sempl-}\wedge\text{)} \} \\
& \neg R
\end{array}$$

Quindi possiamo concludere che $\neg P \wedge (R \Rightarrow \neg(P \Rightarrow Q)) \quad \Rightarrow \quad \neg R$ è una tautologia, come richiesto.

(2) Partiamo dalla conseguenza ($\neg R$) e mostriamo che è equivalente a T usando le due premesse dell'implicazione ($\neg P$ e $R \Rightarrow \neg(P \Rightarrow Q)$) come ipotesi:

$$\begin{array}{ll}
& \neg R \\
\Leftarrow & \quad \{ \textbf{Ip: } R \Rightarrow \neg(P \Rightarrow Q)\text{, } R \text{ occorre in contesto negativo} \} \\
& \neg\neg(P \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{ \text{(doppia negazione)} \} \\
& P \Rightarrow Q \\
\equiv & \quad \{ \text{(eliminazione-}\Rightarrow\text{)} \} \\
& \neg P \vee Q \\
\equiv & \quad \{ \textbf{Ip: } \neg P \} \\
& T \vee Q \\
\equiv & \quad \{ \text{(zero)} \} \\
& T
\end{array}$$

Questo dimostra che la seguente formula è una tautologia:
$\neg P \wedge (R \Rightarrow \neg(P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (T \Rightarrow \neg R)$
e questo è quanto richiesto poiché $(T \Rightarrow \neg R) \equiv \neg R$.

3. $\neg\big((P \Rightarrow Q \vee R) \Rightarrow \neg(Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Soluzione Vediamo due possibili soluzioni, la seconda delle quali usa ipotesi non tautologiche.

(1) Parto dalla premessa:

$\quad \neg\big((P \Rightarrow Q \vee R) \Rightarrow \neg(Q \Rightarrow R)\big)$

$\equiv \quad \{$ ($\neg$-$\Rightarrow$), (doppia negazione) $\}$

$\quad (P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (Q \Rightarrow R)$

$\equiv \quad \{$ (eliminazione-$\Rightarrow$), due volte $\}$

$\quad (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

$\equiv \quad \{$ (distributività), al contrario $\}$

$\quad ((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee R$

$\equiv \quad \{$ (complemento) $\}$

$\quad (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$

$\Rightarrow \quad \{$ (semplificazione-$\wedge$) $\}$

$\quad \neg P \vee R$

$\equiv \quad \{$ (eliminazione-$\Rightarrow$) $\}$

$\quad P \Rightarrow R$

Quindi possiamo concludere che
$\neg\big((P \Rightarrow Q \vee R) \Rightarrow \neg(Q \Rightarrow R)\big) \ \Rightarrow \ (P \Rightarrow R)$
è una tautologia, come richiesto.

(2) Applicando la legge ($\neg$-$\Rightarrow$) alla premessa dell'implicazione, otteniamo la formula equivalente $(P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (Q \Rightarrow R)$. Dimostramo ora che la conseguenza $(P \Rightarrow R)$ è vera, assumendo come ipotesi $(P \Rightarrow Q \vee R)$ e $(Q \Rightarrow R)$.

$\quad P$

$\Rightarrow \quad \{$ **Ip:** $P \Rightarrow Q \vee R$ $\}$

$\quad Q \vee R$

$\Rightarrow \quad \{$ **Ip:** $Q \Rightarrow R$, Q compare positivamente $\}$

$\quad R \vee R$

$\equiv \quad \{$ (idempotenza) $\}$

$\quad R$

Questo dimostra che la seguente formula è una tautologia:
$(P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (Q \Rightarrow R) \ \Rightarrow \ (P \Rightarrow R)$,
come richiesto.

ESERCIZIO 2

Per ognuna delle seguenti formule dire se si tratta di una tautologia oppure no, fornendo un controesempio o una prova della tautologia:

1. $(Q \Rightarrow S) \wedge (\neg Q \Rightarrow R) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$

Soluzione La formula non è una tautologia, perché è falsa per l'assegnamento $\{Q \rightarrow F, S \rightarrow F, R \rightarrow T\}$, come mostrato dalla seguente tabella:

Q	S	R	$(Q$	$\Rightarrow$	$S)$	$\wedge$	$(\neg$	Q	$\Rightarrow$	$R)$	$\Rightarrow$	$(R$	$\Rightarrow$	$S)$
F	F	T	F	T	F	T	T	F	T	T	$\mathbf{F}$	T	F	F
			(1)	(2)	(1)	(4)	(2)	(1)	(3)	(1)	**(5)**	(1)	(2)	(1)

2. $(P \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q) \Rightarrow (\neg R \Rightarrow Q)$

Soluzione Questa formula è una tautologia. Infatti la premessa implica la formula $R \vee Q$ che è equivalente alla conseguenza, come si vede da queste due semplici dimostrazioni:

$\quad (P \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q)$

$\Rightarrow \quad \{$ (semplificazione-$\wedge$), due volte $\}$

$\quad R \vee Q$

$\quad \neg R \Rightarrow Q$

$\equiv \quad \{$ (eliminazione-$\Rightarrow$) e (doppia negazione) $\}$

$\quad R \vee Q$

ESERCIZIO 3
Per ognuno dei seguenti enunciati dichiarativi si fornisca un alfabeto del primo ordine, una corrispondente interpretazione e una formula del primo ordine che lo formalizzi:

1. "Non tutti i nipoti di Adele sono fratelli"

Soluzione

- **Alfabeto**
  - $\mathbf{C} = \{Adele\}$
  - $\mathbf{F} = \emptyset$
  - $\mathbf{P} = \{nipote(\_,\_), fratelli(\_,\_)\}$
- **Interpretazione**: $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$
  - $\mathbf{D} = \mathcal{P}$, con $\mathcal{P}$ insieme delle persone.
  - $\alpha(Adele) =$ "la persona chiamata Adele"
  - $\alpha(nipote)(d, d') \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d è nipote di d'
  - $\alpha(fratelli)(d, d') \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d e d' sono fratelli

L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$\neg(\forall x.(\forall y.nipote(x, Adele) \wedge nipote(y, Adele) \Rightarrow fratelli(x, y)))$$

Una formalizzazione equivalente è la seguente:

$$(\exists x.(\exists y.nipote(x, Adele) \wedge nipote(y, Adele) \wedge \neg fratelli(x, y)))$$

2. "Ogni senatore ha un segretario, ma alcuni ne hanno più di uno"

Soluzione

- **Alfabeto**
  - $\mathbf{C} = \emptyset$
  - $\mathbf{F} = \emptyset$
  - $\mathbf{P} = \{senatore(\_), segretarioDi(\_,\_)\}$
- **Interpretazione**: $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$
  - $\mathbf{D} = \mathcal{P}$, con $\mathcal{P}$ insieme delle persone.
  - $\alpha(senatore)(d) \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d è un senatore
  - $\alpha(segretarioDi)(d, d') \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d è un segretario di d'

L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$(\forall x \,.\, senatore(x) \Rightarrow (\exists y \,.\, segretarioDi(y, x)))$$
$$\wedge\ (\exists x \,.\, senatore(x) \wedge (\exists y \,.\, (\exists z \,.\, segretarioDi(y, x) \wedge segretarioDi(z, x) \wedge \neg(y = z))))$$

ESERCIZIO 4
Si formalizzino i seguenti enunciati dichiarativi usando l'interpretazione standard sui naturali:

1. "Un numero è divisibile per 10 se e solo se è divisibile per 2 e per 5"

Soluzione

$$(\forall x \,.\, divide(x, 10) \equiv divide(x, 2) \wedge divide(x, 5))$$

2. (Congettura di Golbach) "Ogni numero pari maggiore di due è la somma di due numeri primi"

Soluzione

$$(\forall x \,.\, pari(x) \wedge x > 2 \Rightarrow (\exists y \,.\, (\exists z \,.\, primo(y) \wedge primo(z) \wedge x = y + z)))$$

ESERCIZIO 5

Calcolare, motivando la risposta, il valore di verità della formula

$$\Phi = (\forall x \,.\, P(x) \vee (\exists y \,.\, Q(y,x)))$$

nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$ dove $D = \{a, b, c\}$ ed α è definita come segue:

$$\alpha(P)(z) = \begin{cases} T & \text{se } z = a \text{ o } z = c, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \alpha(Q)(z,v) = \begin{cases} T & \text{se } (z,v) \in \{(a,b),(a,c)\} \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare cioè $I_{\rho_0}(\Phi)$ usando le regole della semantica del prim'ordine, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.

Entrambe le seguenti soluzioni sono considerate corrette. La prima può essere vista come una versione discorsiva, più imprecisa ma più facile da leggere della seconda.

Soluzione informale Si chiede di valutare il valore di verità della formula $\Phi = (\forall x \,.\, P(x) \vee (\exists y \,.\, Q(y,x)))$ nell'interpretazione data. Poiché si tratta di una quantificazione universale, per la regola (S8) la formula è vera se e solo se sono vere le formule ottenute sostituendo la variabile x con ogni possibile valore del dominio in $P(x) \vee (\exists y \,.\, Q(y,x))$, cioè:

1. $P(a) \vee (\exists y \,.\, Q(y,a))$: trattandosi di una disgiunzione, è sufficiente che sia vera una delle due sottoformule; poiché $P(a)$ per la regola (S1) è vera (visto che $\alpha(P)(a) = T$), la formula tutta è vera.
2. $P(c) \vee (\exists y \,.\, Q(y,c))$ è vera perché $P(c)$ è vera.
3. $P(b) \vee (\exists y \,.\, Q(y,b))$: la formula atomica $P(b)$ è falsa; per la formula $(\exists y \,.\, Q(y,b))$, per la regola (S9) dobbiamo vedere se esiste un elemento del dominio che sostituito a y rende $Q(y,b)$ vera. Dalla definizone di $\alpha(Q)$ abbiamo che $\alpha(Q)(a,b) = T$, e quindi concludiamo che la formula tutta è vera.

Possiamo concludere che la formula Φ è vera nell'interpretazione fornita.

Soluzione formale

$$\begin{array}{ll}
 & I_{\rho_0}(\Phi) \;\equiv\; I_{\rho_0}((\forall x \,.\, P(x) \vee (\exists y \,.\, Q(y,x)))) \\
\equiv & \quad \{ \text{ Regola (S8), quantificazione universale sul dominio finito } D = \{a,b,c\}, \text{ espressa con } \wedge \text{ } \} \\
 & I_{\rho_0[^a/_x]}(P(x) \vee (\exists y \,.\, Q(y,x))) \;\wedge\; I_{\rho_0[^b/_x]}(P(x) \vee (\exists y \,.\, Q(y,x))) \;\wedge\; I_{\rho_0[^c/_x]}(P(x) \vee (\exists y \,.\, Q(y,x))) \\
\equiv & \quad \{ \text{ Regola (S5), tre volte } \} \\
 & (I_{\rho_0[^a/_x]}(P(x)) \vee I_{\rho_0[^a/_x]}((\exists y \,.\, Q(y,x)))) \;\wedge\; (I_{\rho_0[^b/_x]}(P(x)) \vee I_{\rho_0[^b/_x]}((\exists y \,.\, Q(y,x)))) \;\wedge \\
 & (I_{\rho_0[^c/_x]}(P(x)) \vee I_{\rho_0[^c/_x]}((\exists y \,.\, Q(y,x)))) \\
\equiv & \quad \{ \text{ Regola (S1), tre volte } \} \\
 & (\alpha(P)(\alpha_{\rho_0[^a/_x]}(x)) \vee I_{\rho_0[^a/_x]}((\exists y \,.\, Q(y,x)))) \;\wedge\; (\alpha(P)(\alpha_{\rho_0[^b/_x]}(x)) \vee I_{\rho_0[^b/_x]}((\exists y \,.\, Q(y,x)))) \;\wedge \\
 & (\alpha(P)(\alpha_{\rho_0[^c/_x]}(x)) \vee I_{\rho_0[^c/_x]}((\exists y \,.\, Q(y,x)))) \\
\equiv & \quad \{ \text{ Regola (R0), tre volte } \} \\
 & (\alpha(P)(a) \vee I_{\rho_0[^a/_x]}((\exists y \,.\, Q(y,x)))) \;\wedge\; (\alpha(P)(b) \vee I_{\rho_0[^b/_x]}((\exists y \,.\, Q(y,x)))) \;\wedge\; (\alpha(P)(c) \vee I_{\rho_0[^c/_x]}((\exists y \,.\, Q(y,x)))) \\
\equiv & \quad \{ \text{ Definizione di } \alpha(P)\text{, tre volte } \} \\
 & (T \vee I_{\rho_0[^a/_x]}((\exists y \,.\, Q(y,x)))) \;\wedge\; (F \vee I_{\rho_0[^b/_x]}((\exists y \,.\, Q(y,x)))) \;\wedge\; (T \vee I_{\rho_0[^c/_x]}((\exists y \,.\, Q(y,x)))) \\
\equiv & \quad \{ \text{ (zero), (unità) } \} \\
 & I_{\rho_0[^b/_x]}((\exists y \,.\, Q(y,x))) \\
\equiv & \quad \{ \text{ Regola (S9), quantificazione esistenziale sul dominio finito } D = \{a,b,c\}, \text{ espressa con } \vee \text{ } \} \\
 & I_{\rho_0[^b/_x][^a/_y]}(Q(y,x)) \;\vee\; I_{\rho_0[^b/_x][^b/_y]}(Q(y,x)) \;\vee\; I_{\rho_0[^b/_x][^c/_y]}(Q(y,x)) \\
\equiv & \quad \{ \text{ Regole (S1) e (R0) } \} \\
 & \alpha(Q)(a,b) \;\vee\; \alpha(Q)(b,b) \;\vee\; \alpha(Q)(c,b) \\
\equiv & \quad \{ \text{ Definizione di } \alpha(Q) \text{ } \} \\
 & T \vee F \vee F \;\equiv\; \{\text{(zero)}\} \quad T
\end{array}$$