QUANTIFICATORI FUNZIONALI: MINIMO, MASSIMO, SOMMATORIA, CARDINALITA’

Corso di Logica per la Programmazione

A.A. 2013/14

ESTENSIONE DEL PRIMO ORDINE CON QUANTIFICATORI FUNZIONALI

- Abbiamo esteso il linguaggio del primo ordine con
  - notazione intensionale per insiemi
  - simboli di disuguaglianza
  - notazione per intervalli

  e le relative leggi.
- Ora aggiungiamo alcuni “quantificatori funzionali” che saranno utili per la verifica di programmi con Triple di Hoare:
  - minimo/massimo di un insieme di valori
  - sommatoria di un insieme di valori
  - cardinalità di un insieme
    - sono quantificatori **funzionali** perché restituiscono un valore, non un booleano

QUANTIFICATORE “SOMMATORIA”

- $(\boldsymbol{\sum} \mathbf{x} : \mathbf{P(x)} \,.\, \mathbf{E(x)})$ denota

  “la somma di tutti gli **E(v)** per tutti i valori **v** per cui vale **P(v)**”

- **P(x)** è una formula (dominio della sommatoria), **E(x)** è un termine (un'espressione)

- Esempi:
  - $(\sum x : x > 0 \wedge x \leq 3 \,.\, x^2) = 1 + 4 + 9 = 14$
  - $(\sum x : x \in [3, 5) \,.\, 2x + 1) = ?? = 7 + 9 = 16$
  - $(\sum x : x \in [0, 10) \wedge \mathrm{pari}(x) \,.\, x) = ?? = 0+2+4+6+8 = 20$
  - $(\sum x : x > 7 \wedge x \in [0, 10) \,.\, 5) = ?? = 5 + 5 = 10$
  - $(\sum x : \mathbf{F} \,.\, 2\,x + 5) = ?? = 0$

QUANTIFICATORE "CARDINALITÀ"

- **#{ x : P(x) | Q(x)}** denota
  "il numero dei valori **v** per cui valgono **P(v)** e **Q(v)**"

- **P(x)** e **Q(x)** sono formule; **P(x)** è il dominio.
  - " | " ha il significato di "$\wedge$"

- Esempi: $\#\{ x : x \in [0, 10) \mid pari(x)\} = 5$
  - $\#\{ x : x \in [0, 10) \mid (\exists y.\ y \in \mathbf{N} \wedge y^2 = x)\} = ??$ $= 4$
  - $\#\{ x : \mathbf{T} \mid x^2 \leq x\} = ?? = 2$
  - $\#\{ x : \mathbf{F} \mid x \in [3, 5) \wedge pari(x) \} = ??$ $= 0$

- Nota: **#** può essere definita mediante **Σ**:

  $\#\{ x : P \mid Q\} = (\Sigma\, x : P \wedge Q\ .\ 1)$ (Elim-#)

QUANTIFICATORI PER MINIMO E MASSIMO

- **a max b** = a se a ≥ b, b altrimenti; **a min b** analogamente
- **(max x: P(x) . E(x))** denota

"il massimo dei valori **E(v)** per tutti i **v** per cui vale **P(v)**"

- **(min x: P(x) . E(x))** denota

"il minimo dei valori **E(v)** per tutti i **v** per cui vale **P(v)**"

- **P(x)** è una formula (dominio), **E(x)** è un'espressione
- Esempi: $(\max x: x \in [3, 10) \wedge primo(x) . x^2) = ??$ $= 49$

Array **a**

0	1	2	3	4
45	23	10	16	13

  - $(\min i: i \in [0, 5) . \mathbf{a}[i]) = ??$ $= 10$
  - $(\max i: i \in [0, 5) \wedge primo(\mathbf{a}[i]) . i) = ??$ $= 4$

SINTASSI DEL PRIMO ORDINE CON QUANTIFICATORI FUNZIONALI

- Estendiamo le categorie sintattiche di termini, costanti ed espressioni con la sintassi vista:

Term ::= ... | (**Σ** Var : Fbf .Term) | #{Var : Fbf | Fbf} |
(**max** Var : Fbf .Term) | (**min** Var : Fbf .Term) | Exp

Const ::= 0 | 1 | 2 | ... | +∞ | -∞

Exp ::= ... *ordinarie espressioni aritmetiche*

- x occorre **legata** in
(**Σ** x:P . E), #{x:P | Q}, (**max** x:P . E), (**min** x:P . E)

FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI CON QUANTIFICATORI FUNZIONALI

Si assuma che le sequenze siano array con dominio [0, n)

- x è il Massimo Comun Divisore di y e z (usando il predicato Divide(x,y) $\equiv$ ($\exists$ z . y = x * z))
- x è un numero **perfetto** (cioè è la somma dei suoi divisori eccetto se stesso)
- la sequenza **a** contiene più numeri pari che numeri dispari
- x è il numero di elementi della sequenza **a** che sono maggiori della somma degli elementi che lo precedono
- x è uguale alla somma dei quadrati degli elementi di **a** con indice pari

LEGGI PER I QUANTIFICATORI FUNZIONALI

- I quantificatori funzionali, introdotti come estensione della Logica dei Predicati, possono essere definiti nella logica estesa con i naturali.
- Nella dispensa [LP2] “Logica per la Porgrammazione: Applicazioni” sono riportate numerose leggi che descrivono loro proprietà.
- Molte di queste descrivono proprietà abbastanza ovvie: ne vediamo velocemente alcune.
- Altre sono molto importanti per la parte del corso su Triple di Hoare, e le vediamo in dettaglio.
- Come al solito, le leggi sono dimostrabili usando le definizioni e/o altre leggi.

LEGGI GENERALI (COME PER LE NORMALI QUANTIFICAZIONI)

- **Legge di ridenominazione**
  - ad esempio

    $(\Sigma x : P . E) \equiv (\Sigma y : P[y/x] . E[y/x])$

    se y non occorre né in P né in E

- **Legge di annidamento**
  - ad esempio

    $(\Sigma y:R . (\Sigma x:S . P)) = (\Sigma x:S . (\Sigma y: R . P))$

    se y non è libero in S e x non è libero in R

LEGGI SPECIFICHE

- $(\min x : P . -E) = -(\max x : P . E)$ **(min:max)**

Dominio equivalente (analogamente per gli altri quantificatori):

- $(\forall x. P \equiv Q) \Rightarrow \#\{ x : P \mid R\} = \#\{ x : Q \mid R\}$ (#:≡)

Inclusione di dominio:

- $(\forall x. P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\mathbf{min}\ x{:}P.\ E) \geq (\mathbf{min}\ x{:}Q.\ E)$ (**min**:⇒)
- $(\forall x. P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\mathbf{max}\ x{:}P.\ E) \leq (\mathbf{max}\ x{:}Q.\ E)$ (**max**:⇒)
- $(\forall x. P \Rightarrow Q) \Rightarrow \#\{ x : P \mid R\} \leq \#\{ x : Q \mid R\}$ (#:⇒)
- $(\forall x. E \geq 0 \wedge P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\boldsymbol{\Sigma} x{:}P.E) \leq (\boldsymbol{\Sigma} x{:}Q.E)$ (**Σ**:⇒)
- $(\forall x. E \leq 0 \wedge P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\boldsymbol{\Sigma} x{:}P.E) \geq (\boldsymbol{\Sigma} x{:}Q.E)$

LEGGI DI DISTRIBUTIVITA'

- $(\boldsymbol{\Sigma} x : P \,.\, E + F) = (\boldsymbol{\Sigma} x : P \,.\, E) + (\boldsymbol{\Sigma} x : P \,.\, F)$ $\qquad$ $(\boldsymbol{\Sigma}{:}+)$

- $(\mathbf{max}\ x{:}P.\ E\ \mathit{max}\ F) =$

  $$(\mathbf{max}\ x{:}P.\ E)\ \mathit{max}\ (\mathbf{max}\ x{:}P.\ F)$$

- $(\mathbf{min}\ x{:}P.\ E\ \mathit{min}\ F) =$

  $$(\mathbf{min}\ x{:}P.\ E)\ \mathit{min}\ (\mathbf{min}\ x{:}P.\ F)$$

LEGGI DI DOMINIO

- $(\boldsymbol{\Sigma} x\!: P \vee Q . E) = (\boldsymbol{\Sigma} x\!: P . E) + (\boldsymbol{\Sigma} x\!: Q . E) - (\boldsymbol{\Sigma} x\!: P \wedge Q . E)$
- $\#\{x\!:P \vee Q \mid R\} =$
  $\#\{x\!:P \mid R\} + \#\{x\!:Q \mid R\} - \#\{x\!:P \wedge Q \mid R\}$
- $(\mathbf{max}\ x\!:P \vee Q.E) = (\mathbf{max}\ x\!:P.E)\ \mathit{max}\ (\mathbf{max}\ x\!:Q.E)$
- $(\mathbf{min}\ x\!:P \vee Q.E) = (\mathbf{min}\ x\!:P.E)\ \mathit{min}\ (\mathbf{min}\ x\!:Q.E)$

SINGOLETTO E VUOTO

- $(\Sigma x: x = y \, . \, E) = E[y/x]$

- $\#\{x: x = y \mid R\} = \begin{cases} 1 & \text{se } R[y/x] \\ 0 & \text{se } \sim R[y/x] \end{cases}$

- $(\Sigma x: P \, . \, E) = 0$ se P è vuoto
- $\#\{x: P \mid Q\} = 0$ se P è vuoto
- $(\mathbf{min}\ x : P \, . \, E) = +\infty$ se P è vuoto
- $(\mathbf{max}\ x : P \, . \, E) = -\infty$ se P è vuoto

SINGOLETTO E VUOTO

- $(\Sigma x: x = y \,.\, E) = E\,[y/x]$

- $\#\{x: x = y \mid R\} = \begin{cases} 1 & \text{se } R[y/x] \\ 0 & \text{se } \sim R[y/x] \end{cases}$

- $(\Sigma x: P \,.\, E) = 0$ se P è vuoto
- $\#\{x: P \mid Q\} = 0$ se P è vuoto
- $(\mathbf{min}\ x : P \,.\, E) = +\infty$ se P è vuoto
- $(\mathbf{max}\ x : P \,.\, E) = -\infty$ se P è vuoto

LEGGI DELL'INTERVALLO

[a,b] un intervallo non vuoto di naturali

$$(\Sigma x : x \in [a,b] \wedge P . E) = \begin{cases} (\Sigma x : x \in [a,b) \wedge P.\ E) + E[b/x] & \text{se } P[b/x] \\ (\Sigma x : x \in [a,b) \wedge P.\ E) & \text{se } \sim P[b/x] \end{cases}$$

$$\#\{x \in [a,b] \mid P\} = \begin{cases} \#\{x : x \in [a,b) \wedge P\} + 1 & \text{se } P[b/x] \\ \#\{x : x \in [a,b) \wedge P) & \text{se } \sim P[b/x] \end{cases}$$

$$(\mathbf{m}\ x : x \in [a,b] \wedge P.E) = \begin{cases} (\mathbf{m}\ x : x \in [a,b) \wedge P.E)\ \mathit{m}\ E[b/x] & \text{se } P[b/x] \\ (\mathbf{m}\ x : x \in [a,b) \wedge P.E) & \text{se } \sim P[b/x] \end{cases}$$

Attenzione: queste leggi sono errate nella dispensa

USO DI LEGGE INTERVALLO, PROVA DI: $s = (\Sigma x : x \in [1, 3] \land pari(x) . x\hat{}2) \equiv (s = 4)$

$s = (\Sigma x : x \in [1, 3] \land pari(x) . x\hat{}2)$

$\equiv \{(Intervallo\text{-}\Sigma),\ \sim pari(3)\}$

$s = (\Sigma x : x \in [1, 2] \land pari(x) . x\hat{}2)$

$\equiv \{(Intervallo\text{-}\Sigma),\ pari(2)\}$

$s = (\Sigma x : x \in [1, 1] \land pari(x) . x\hat{}2) + 2\hat{}2$

$\equiv \{(Intervallo\text{-}\Sigma),\ \sim pari(1)\}$

$s = (\Sigma x : x \in \emptyset \land pari(x) . x\hat{}2) + 2\hat{}2$

$\equiv \{(\Sigma - vuoto)\}$

$s = 0 + 2\hat{}2$

$\equiv \{calcolo\}$

$s = 4$

ESERCIZI

Utilizzando le leggi dei quantificatori funzionali, dimostrare le seguenti formule:

- $k = (\mathbf{min}\ x : x \in [a,b) \wedge P.\ x) \wedge k \in [a,b) \Rightarrow (\forall x \in [a, k).\ \sim P)$ con $[a,b)$ non vuoto
- $(((\mathbf{min}\ x : x \in [0,N) \wedge P.\ x)\ \mathit{min}\ N) \neq N) \equiv (\exists x \in [0,N)\ .P)$ con N numero naturale

FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI

Si assuma che le sequenze siano array con dominio [0, n)

- Nella sequenza **a** c'è un solo elemento uguale alla sua posizione
- Gli elementi di indice pari della sequenza **a** sono dispari
- Definire il predicato Palindroma(**a**), che vale **T** se e solo la sequenza **a** è simmetrica rispetto al suo punto centrale