DIMOSTRAZIONI DI EQUIVALENZE, SUI CONNETTIVI E SULL'AMBIGUITA' DELLA SINTASSI

Corso di Logica per la Programmazione

A.A. 2013/14

Andrea Corradini

SULLE LEGGI DEL CALCOLO PROPOSIZIONALE

- Abbiamo visto le leggi per **l'equivalenza (≡)**, la **congiunzione (∧)**, la **disgiunzione (∨)**, la **negazione (~)**
- Poi abbiamo visto le leggi per eliminare **implicazione (⇒)**, **conseguenza (⇐)** ed **equivalenza (≡)**
- Si può mostrare che **tutte** le tautologie del Calcolo Proposizionale sono dimostrabili a partire dall'insieme delle leggi visto sinora
- Conviene comunque, per motivi di espressività e compattezza delle definizioni, introdurre altre leggi che corrispondono, per esempio, ad assodate tecniche di dimostrazione

TORNIAMO ALL’ESEMPIO DAL TEST

- **Premesse:**
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio; **($C \Rightarrow A$)**
  - Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno. **($A \Rightarrow B$)**
- **Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:**
  - Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
    - **($C \Rightarrow B$)**
  - Nessuno dei tre amici è andato al cinema
    - **($\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C$)**
  - Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
    - **($B \Rightarrow C$)**
  - Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
    - **($\sim C \Rightarrow \sim B$)**

COME POSSIAMO ESSERE CERTI DELLA RISPOSTA?

- Bisogna determinare quale delle ultime 4 formule è **conseguenza logica** delle premesse, cioè quale delle seguenti formule è una tautologia:

  1) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$
  2) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C)$
  3) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
  4) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\sim C \Rightarrow \sim B)$

- Si possono verificare con tabelle di verità o dimostrazioni, usando le leggi viste.
- Mostriamo che (1) è una tautologia
  - e che (2), (3) e (4) non sono tautologie

LA (1) E' UNA TAUTOLOGIA (Transitività dell'implicazione)

$((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$	(elim-impl)
$\equiv \sim((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \vee (C \Rightarrow B)$	(elim-impl)
$\equiv \sim((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \vee (\sim C \vee B)$	(De Morgan)
$\equiv (\sim (C \Rightarrow A) \vee \sim (A \Rightarrow B)) \vee (\sim C \vee B)$	(elim-impl)
$\equiv (\sim (\sim C \vee A) \vee \sim (\sim A \vee B)) \vee (\sim C \vee B)$	(De Morgan)
$\equiv ((C \wedge \sim A) \vee (A \wedge \sim B)) \vee (\sim C \vee B)$	(commut)(assoc)
$\equiv ((C \wedge \sim A) \vee \sim C) \vee ((A \wedge \sim B) \vee B)$	(distrib)
$\equiv ((C \vee \sim C) \wedge (\sim A \vee \sim C)) \vee ((A \vee B) \wedge (\sim B \vee B))$	(terzo escluso)
$\equiv (T \wedge (\sim A \vee \sim C)) \vee ((A \vee B) \wedge T)$	(unita')
$\equiv (\sim A \vee \sim C) \vee (A \vee B)$	(terzo escluso)
$\equiv (T \vee \sim C \vee B)$	(dominanza)
$\equiv T$	

COME SI VEDE CHE UNA FORMULA NON E' UNA TAUTOLOGIA?

- Esempio: $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
- Basta trovare un'interpretazione che la rende falsa
- **Evitare** di costruire l'intera tabella di verità!!!

  - Determiniamo valori di verità per **A**, **B** e **C** che rendano falsa la formula
  - Poiché è un'implicazione, è falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa
  - Quindi $(B \Rightarrow C)$ deve essere falso, quindi $B \rightarrow T$, $C \rightarrow F$
  - A questo punto si vede che per qualunque valore di **A** la premessa è **T**
  - Quindi le seguenti interpretazioni rendono la formula falsa:

    $\{A \rightarrow T, B \rightarrow T, C \rightarrow F\}$ e $\{A \rightarrow F, B \rightarrow T, C \rightarrow F\}$

COME SI VEDE CHE UNA FORMULA NON E' UNA TAUTOLOGIA? (2)

- Mostrare che $((A \Rightarrow B) \wedge \sim A) \Rightarrow B$ non è una tautologia
  - Poiché è un'implicazione, è falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa
  - Quindi **B → F**
  - La premessa è una congiunzione: per essere vera entrambi gli argomenti devono essere veri
  - **~A** è vera solo se **A → F**
  - Quindi abbiamo trovato l'interpretazione **{A → F, B → F}**
  - Resta da controllare che renda la formula falsa

ALTRE LEGGI UTILI: LEGGI DEL COMPLEMENTO

$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$	(Complemento)
$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$	

Dimostrazione di $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

$p \vee (\sim p \wedge q)$

$\equiv$ {Distributività}

$(p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)$

$\equiv$ {Terzo escluso}

$\mathbf{T} \wedge (p \vee q)$

$\equiv$ {Unità}

$(p \vee q)$

LEGGI DI ASSORBIMENTO

$$p \land (p \lor q) \equiv p \qquad \text{(Assorbimento)}$$
$$p \lor (p \land q) \equiv p$$

Dimostrazione di $p \land (p \lor q) \equiv p$

$p \land (p \lor q)$

$\equiv$ {Unità}

$(p \lor \mathbf{F}) \land (p \lor q)$

$\equiv$ {Distributività}

$p \lor (\mathbf{F} \land q)$

$\equiv$ {Zero}

$p \lor \mathbf{F}$

$\equiv$ {Unità}

p

INSIEMI FUNZIONALMENTE COMPLETI DI CONNETTIVI LOGICI

- Abbiamo introdotto 6 connettivi logici:

not	$\sim p$	negazione
and	$p \wedge q$	congiunzione
or	$p \vee q$	disgiunzione
se p allora q	$p \Rightarrow q$	implicazione
p se e solo se q	$p \equiv q$	equivalenza
p se q	$p \Leftarrow q$	conseguenza

- Alcuni possono essere definiti in termini di altri.
- Molti sottoinsiemi sono "funzionalmente completi", cioè permettono di derivare tutti gli altri.
- Vediamo che $\{\wedge, \sim\}$ è funzionalmente completo
- Esercizio: anche $\{\vee, \sim\}$ e $\{\Rightarrow, \sim\}$ sono funzionalmente completi

L'insieme $\{\wedge, \sim\}$ è funzionalmente completo

- Occorre mostrare che una qualunque formula proposizionale è equivalente a una formula che contiene solo $\wedge$ e $\sim$
- Per induzione strutturale sulla sintassi delle formule:
  - implicazione ($\Rightarrow$), conseguenza ($\Leftarrow$) ed equivalenza ($\equiv$) possono essere eliminate
  - $p \vee q$

    $\equiv$ {(doppia negazione)}

    $\sim\sim(p \vee q)$

    $\equiv$ {(De Morgan)}

    $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

IL CONNETTIVO "NAND"

- Si consideri il connettivo proposizionale binario **nand** la cui semantica è definita dalla seguente tabella di verità:

P	Q	P **nand** Q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

- Si provi che l'insieme { **nand** } è funzionalmente completo.

AMBIGUITA' DELLA SINTASSI DEL CALCOLO PROPOSIZIONALE

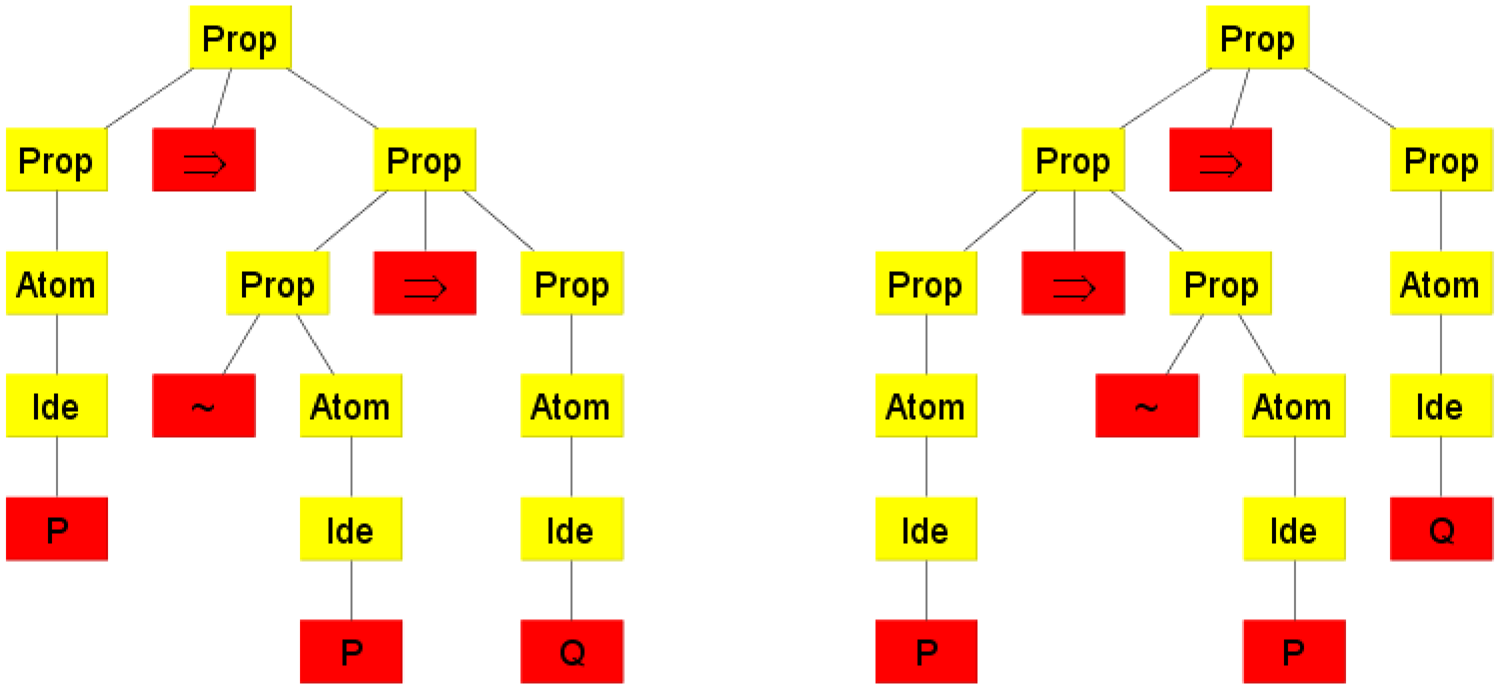
- Abbiamo già presentato la grammatica del calcolo:

$$
\begin{array}{l}
\text{Prop} ::= \\
\qquad \text{Prop} \equiv \text{Prop} \mid \text{Prop} \wedge \text{Prop} \mid \text{Prop} \vee \text{Prop} \mid \\
\qquad\qquad \text{Prop} \Rightarrow \text{Prop} \mid \text{Prop} \Leftarrow \text{Prop} \mid \\
\qquad\qquad \text{Atom} \mid \sim\text{Atom} \\
\text{Atom} ::= \\
\qquad \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \text{Ide} \mid (\text{Prop}) \\
\text{Ide} ::= \\
\qquad \text{p} \mid \text{q} \mid \ldots \mid \text{P} \mid \text{Q} \mid \ldots
\end{array}
$$

- Questa grammatica è ambigua: ci sono proposizioni che hanno più di un albero di derivazione.
- Per esempio: $\mathbf{P} \Rightarrow\ \sim\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$

AMBIGUITA' DELLA GRAMMATICA: UN ESEMPIO

- Due alberi di derivazione per $\mathbf{P \Rightarrow {\sim}P \Rightarrow Q}$



$\mathbf{P \Rightarrow [\sim P \Rightarrow Q]}$ $\qquad$ $\mathbf{[P \Rightarrow \sim P] \Rightarrow Q}$

- Esercizio: mostrare che la prima è una tautologia, la seconda no

PRECEDENZA TRA CONNETTIVI

- Stabiliamo i seguenti livelli di precedenza tra connettivi logici, per disambiguare le proposizioni:

operatore	livello di precedenza
$\equiv$	0
$\Rightarrow, \Leftarrow$	1
$\wedge, \vee$	2
$\neg$	3

- Per esempio,
  - $(P \Rightarrow (Q \wedge R)) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R))$ si può scrivere
  - $P \Rightarrow Q \wedge R \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$
- **Attenzione**: proposizioni come $\mathbf{P \wedge Q \vee R}$ o $\mathbf{P \Rightarrow Q \Rightarrow R}$ restano **ambigue**. Se non sono disambiguate con parentesi, vengono considerate **sintatticamente errate**