Logica per la Programmazione - LPP 2013/14

Leggi sul calcolo proposizionale

$A \vee \mathsf{F} \equiv A$	$A \wedge \mathsf{T} \equiv A$	(unità)
$A \vee \mathsf{T} \equiv \mathsf{T}$	$A \wedge \mathsf{F} \equiv \mathsf{F}$	(assorbimento o zero)
$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$	(idempotenza)
$A \wedge B \equiv B \wedge A$	$A \vee B \equiv B \vee A$	(commutatività)
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$	(associatività)
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	(distributività)
$\neg \mathsf{T} \equiv \mathsf{F}$	$\neg\neg A \equiv A$	(T : F / doppia negazione)
$A \vee \neg A \equiv \mathsf{T}$	$A \wedge \neg A \equiv \mathsf{F}$	(terzo escluso / contraddizione)
$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	(De Morgan)
$(A \equiv B) \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftarrow B)$	$(A \equiv B) \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	(elim.-$\equiv$ / elim.-$\equiv$-bis)
$(A \Leftarrow B) \equiv (B \Rightarrow A)$	$(A \Rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$	(elim.-$\Leftarrow$ / elim.-$\Rightarrow$)
$\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$	$\neg(A \equiv B) \equiv (A \equiv \neg B)$	($\neg$-$\Rightarrow$ / $\neg$-$\equiv$)
$A \vee (\neg A \wedge B) \equiv A \vee B$	$A \wedge (\neg A \vee B) \equiv A \wedge B$	(complemento)
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$	(assorbimento)
$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$	$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$	(contronominale / Modus Ponens)
$A \wedge B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow A \vee B$	(semplif.-$\wedge$ / introd.-$\vee$)
$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \Rightarrow A \vee C$	(transitività-$\Rightarrow$ / risoluzione)

Semantica di formule del primo ordine per interpretazione $I = (\mathbf{D}, \alpha)$ e assegnamento $\rho : V \to \mathbf{D}$

Semantica di termini

(R0) se t è la variabile x, allora $\alpha_\rho(t) = \rho(x)$;

(R1) se t è la costante c, allora $\alpha_\rho(t) = \alpha(c)$;

(R2) se t è il termine $f(t_1, \ldots, t_n)$ allora $\alpha_\rho(t) = \alpha(f)(\alpha_\rho(t_1), \ldots, \alpha_\rho(t_n))$.

Semantica di formule

(S1) se φ è la formula atomica $p(t_1, \ldots, t_n)$ allora $I_\rho(\varphi) = \alpha(p)(\alpha_\rho(t_1), \ldots, \alpha_\rho(t_n))$

(S3) se φ è la formula $\neg P$, allora $I_\rho(\varphi) = \overline{I_\rho(P)}$, dove $\overline{\mathsf{T}} = \mathsf{F}$ e $\overline{\mathsf{F}} = \mathsf{T}$

(S4) se $\varphi = P \wedge Q$, allora $I_\rho(\varphi) = \mathsf{T}$ se $I_\rho(P) = \mathsf{T}$ e $I_\rho(Q) = \mathsf{T}$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = \mathsf{F}$

(S5) se $\varphi = P \vee Q$, allora $I_\rho(\varphi) = \mathsf{F}$ se $I_\rho(P) = \mathsf{F}$ e $I_\rho(Q) = \mathsf{F}$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = \mathsf{T}$

(S6) se $\varphi = P \Rightarrow Q$, allora $I_\rho(\varphi) = \mathsf{F}$ se $I_\rho(P) = \mathsf{T}$ e $I_\rho(Q) = \mathsf{F}$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = \mathsf{T}$

(S7) se $\varphi = P \equiv Q$, allora $I_\rho(\varphi) = \mathsf{T}$ se $I_\rho(P) = I_\rho(Q)$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = \mathsf{F}$

(S8) se $\varphi = (\forall x.P)$, allora $I_\rho(\varphi) = \mathsf{T}$ se $I_{\rho[^d/_x]}(P) = \mathsf{T}$ per qualunque $d \in \mathbf{D}$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = \mathsf{F}$

(S9) se $\varphi = (\exists x.P)$, allora $I_\rho(\varphi) = \mathsf{T}$ se c'è un elemento $d \in \mathbf{D}$ per cui $I_{\rho[^d/_x]}(P) = \mathsf{T}$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = \mathsf{F}$