LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2014-2015
Prima prova di verifica intermedia - 4/11/2014

Attenzione: si scrivano **nome**, **cognome**, **matricola** e **corso IN ALTO A DESTRA** su ogni foglio che si consegna.

ESERCIZIO 1
Per ognuna delle seguenti formule si dica se si tratta di una tautologia oppure no. Se è una tautologia si fornisca una dimostrazione (non per casi) altrimenti si fornisca un controesempio.

1. $(Q \Rightarrow P) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (\neg Q \Rightarrow R)$
2. $((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg R) \;\vee\; \neg(P \Rightarrow R) \;\vee\; \neg(\neg R \Rightarrow \neg Q)$
3. $(Q \vee S) \wedge (Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$

ESERCIZIO 2
Utilizzando il principio di sostituzione dell'implicazione, si applichi l'ipotesi non tautologica $P \wedge \neg R \Rightarrow \neg Q \vee S$ alle seguenti formule, completando il passo di dimostrazione con la relativa giustificazione.

1. $(S \Rightarrow P \wedge \neg R \wedge Q) \Rightarrow S \vee R$
2. $(P \wedge \neg R) \vee Q \Rightarrow (S \Rightarrow \neg Q)$

ESERCIZIO 3
Si formalizzi il seguente enunciato fornendo un alfabeto del primo ordine e una corrispondente interpretazione sul dominio delle persone.

"Gino e Lia sono cugini solo se hanno un nonno in comune ma non sono fratelli"

ESERCIZIO 4
Si formalizzi il seguente enunciato utilizzando l'alfabeto del primo ordine e l'interpretazione sul dominio dei naturali che sono proposti.

"Due numeri sono *coprimi* se e solo se non hanno nessun divisore in comune diverso da 1"

- **Alfabeto**: $\mathbf{C} = \{\mathit{0}, \mathit{1}, \mathit{2}, \ldots\}$, $\mathbf{F} = \emptyset$, $\mathbf{P} = \{\mathit{coprimi}(\_,\_), \mathit{divisore}(\_,\_), = (\_,\_)\}$,
- **Interpretazione**: $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$, con
  - $\mathbf{D} = \mathbb{N}$, con $\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali.
  - $\alpha(\mathit{0}) =$ "il numero 0", e analogamente per tutte le altre costanti.
  - $\alpha(\mathit{coprimi})(n, m) = \mathbf{T}$ se e solo se n e m sono coprimi.
  - $\alpha(\mathit{divisore})(n, m) = \mathbf{T}$ se e solo se n è un divisore di m.
  - $\alpha(=)(n, m) = \mathbf{T}$ se e solo se n e m sono lo stesso numero.

ESERCIZIO 5
Si calcoli, motivando la risposta, il valore di verità della formula

$$\Phi = (\forall x \,.\, R(x) \Rightarrow (\exists y \,.\, S(x, y) \wedge \neg R(y)))$$

nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$, dove $D = \{a, b, c\}$ ed α è definita come segue

$$\alpha(R)(z) = \begin{cases} T & \text{se } z \in \{a, b\} \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \alpha(S)(z, v) = \begin{cases} T & \text{se } (z, v) \in \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, c)\} \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcoli cioè $I_{\rho_0}(\Phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.