LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2014-2015
Recupero Primo Compitino - 16/1/2015 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Dire se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tabelle di verità; altrimenti va mostrato un controesempio con relativa giustificazione.

1. $\neg\big((P \Rightarrow Q \wedge R) \Rightarrow (Q \vee S) \wedge Z\big) \;\Rightarrow\; (Z \Rightarrow \neg P)$
2. $\neg(R \Rightarrow P \wedge Q) \Rightarrow \big((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \wedge Q\big)$
3. $(Q \Rightarrow R \vee S) \wedge (R \Rightarrow S \wedge P) \Rightarrow (Q \wedge \neg P \Rightarrow S)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La formula è una tautologia come mostrato dalla seguente dimostrazione. Partiamo dalla premessa:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg\big((P \Rightarrow Q \wedge R) \Rightarrow (Q \vee S) \wedge Z\big) \\
\equiv & \quad \{(\neg\text{-}\Rightarrow)\} \\
 & (P \Rightarrow Q \wedge R) \wedge \neg((Q \vee S) \wedge Z) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (P \Rightarrow Q \wedge R) \wedge (\neg(Q \vee S) \vee \neg Z) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (P \Rightarrow Q \wedge R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg S) \vee \neg Z) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\} \\
 & (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge ((\neg Q \wedge \neg S) \vee \neg Z) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{sempl-}\wedge) \text{ 2 volte, occorrenze positive}\} \\
 & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg Z) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{risoluzione})\} \\
 & \neg P \vee \neg Z \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\} \\
 & Z \Rightarrow \neg P
\end{array}
$$

2. La formula non è una tautologia, in quanto l'interpretazione: $\{P \mapsto \mathbf{T}, Q \mapsto \mathbf{F}, R \mapsto \mathbf{T}\}$ la rende falsa. La seguente valutazione (riga della tabella di verità corrispondente all'interpretazione) giustifica la risposta:

P	Q	R	$\neg$	$(R$	$\Rightarrow$	P	$\wedge$	$Q)$	$\Rightarrow$	$((\neg$	P	$\Rightarrow$	$Q)$	$\Rightarrow$	R	$\wedge$	$Q)$
T	F	T	T	T	F	T	F	F	**F**	F	T	T	F	F	T	F	F
			4	1	3	1	2	1	**5**	2	1	3	1	4	1	2	1

3. La formula è una tautologia come mostrato dalla seguente dimostrazione. Dimostriamo la conseguenza utilizzando le premesse come ipotesi non tautologiche:

$Q \wedge \neg P$

$\Rightarrow$ $\quad$ **{Ip: $Q \Rightarrow R \vee S$, occorrenza positiva}**

$(R \vee S) \wedge \neg P$

$\Rightarrow$ $\quad$ **{Ip: $R \Rightarrow S \wedge P$, occorrenza positiva}**

$((S \wedge P) \vee S) \wedge \neg P$

$\equiv$ $\quad$ {(Assorbimento)}

$S \wedge \neg P$

$\Rightarrow$ $\quad$ {(sempl-$\wedge$)}

S

ESERCIZIO 2
Si formalizzi il seguente enunciato usando l'alfabeto con simboli di predicato $\{amico(\_,\_)\}$, rispetto all'interpretazione fissata $(\mathcal{P}, \alpha)$, dove $\mathcal{P}$ è l'insieme delle persone e $\alpha(amico)(x, y)$ è vera se e solo se x è amico di y:

"Se una persona p ha almeno un amico, allora gli amici degli amici di p sono amici di p."

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

$$(\exists x.amico(x,p) \Rightarrow (\forall z.(\forall w.amico(w,p) \wedge amico(z,w) \Rightarrow amico(z,p)))).$$

ESERCIZIO 3
Si formalizzi il seguente enunciato (chiamato *la congettura debole di Goldbach*) utilizzando l'interpretazione standard sui naturali, e indicando esplicitamente le costanti, i simboli di predicato e quelli di funzione utilizzati.

"Ogni numero dispari strettamente maggiore di 5 può essere scritto come somma di tre numeri primi"

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

$$(\forall x \,.\, dispari(x) \wedge maggiore(x,5) \Rightarrow (\exists y \,.\, (\exists z \,.\, (\exists v \,.\, primo(y) \wedge primo(z) \wedge primo(v) \wedge x = sum(y, sum(z,v))))))$$

Costanti: $\{5\}$; Simboli di funzione: $\{sum(\_,\_)\}$; Simboli di predicato: $\{dispari(\_), maggiore(\_,\_), primo(\_), (\_ = \_)\}$, tutti con l'ovvio significato.

ESERCIZIO 4
Si calcoli, motivando la risposta, il valore di verità della formula

$$\Phi = (\forall x \,.\, (\exists y \,.\, P(x,y) \wedge (Q(y) \Rightarrow Q(x))))$$

nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$, dove $D = \{*, \#, o\}$ ed α è definita come segue

$$\alpha(Q)(z) = \begin{cases} T & \text{se } z \in \{\#\} \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \alpha(P)(z,v) = \begin{cases} T & \text{se } (z,v) \in \{(*,\#),(*,o),(\#,\#),(o,*)\} \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcoli cioè $I_{\rho_0}(\Phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.

SOLUZIONE ESERCIZIO 4
La formula è vera nell'interpretazione data. Per mancanza di tempo indico solo brevemente lo schema della dimostrazione (a un livello non sufficiente per un compito). Trattandosi di una quantificazione universale, per (S8) andava verificata la verità della formula $(\exists y \,.\, P(x,y) \wedge (Q(y) \Rightarrow Q(x)))$ per tutti i tre possibili valori di x. Per ognuno di questi valori, per (S9) andava trovato almeno un valore che sostituito ad y renda vera la formula $P(x,y) \wedge (Q(y) \Rightarrow Q(x))$, cioè, per (S4), renda vera sia $P(x,y)$ che $(Q(y) \Rightarrow Q(x))$, Si vede facilmente (usando (S6) e (S1)) che le coppie $(x,y) \in \{(*,o),(\#,\#),(o,*)\}$ rendono vere queste formule, pertanto la formula originale è vera.