LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2014-2015
Secondo Appello - 11/2/2015 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1
Si dica se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tabelle di verità; altrimenti va mostrato un controesempio con relativa giustificazione.

1. $P \wedge S \Rightarrow Q \wedge \neg R \equiv \neg Q \vee R \Rightarrow \neg P$
2. $\neg(P \Rightarrow (Q \vee S) \wedge \neg R) \wedge (Q \vee S) \Rightarrow R$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La formula non è una tautologia, in quanto l'interpretazione: $\{P \mapsto \mathbf{T}, Q \mapsto \mathbf{F}, R \mapsto \mathbf{F}, S \mapsto \mathbf{F}\}$ (o in alternativa $R \mapsto \mathbf{T}$ e $Q \mapsto \mathbf{T}$) la rende falsa. Infatti la formula $P \wedge S \Rightarrow Q \wedge \neg R$ risulta $\mathbf{T}$ dato che $P \wedge S$ è $\mathbf{F}$. Al contrario la formula $\neg Q \vee R \Rightarrow \neg P$ risulta $\mathbf{F}$ dato che $\neg P$ è $\mathbf{F}$ mentre $\neg Q \vee R$ è $\mathbf{T}$.
2. La formula è una tautologia come mostrato dalla seguente dimostrazione. Partiamo dalla premessa:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(P \Rightarrow (Q \vee S) \wedge \neg R) \wedge (Q \vee S) \\
\equiv & \quad \{(\neg\text{-}\Rightarrow)\} \\
 & P \wedge \neg((Q \vee S) \wedge \neg R) \wedge (Q \vee S) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & P \wedge (\neg(Q \vee S) \vee \neg\neg R) \wedge (Q \vee S) \\
\equiv & \quad \{(\text{doppia negazione})\} \\
 & P \wedge (\neg(Q \vee S) \vee R) \wedge (Q \vee S) \\
\equiv & \quad \{(\text{complemento})\} \\
 & P \wedge R \wedge (Q \vee S) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{sempl-}\wedge)\text{ 2 volte, occorrenze positive}\} \\
 & R
\end{array}
$$

ESERCIZIO 2
Si formalizzi il seguente enunciato usando l'alfabeto con simboli di predicato $\{conosce(\_,\_), italiano(\_)\}$ rispetto all'interpretazione fissata $(\mathcal{P}, \alpha)$, dove $\mathcal{P}$ è l'insieme delle persone, $\alpha(conosce)(p, q)$ è vera se e solo se p conosce q, e $\alpha(italiano)(p)$ è vera se e solo se p è italiano:

"C'è chi conosce solo italiani, ma tutti conoscono almeno un italiano."

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

$$(\exists x.(\forall y.conosce(x, y) \Rightarrow italiano(y))) \wedge (\forall z.(\exists w.conosce(z, w) \wedge italiano(w)))$$

ESERCIZIO 3
Si provi che la seguente formula è valida (A, B, C e D contengono la variabile libera x):

$$(\forall x\,.\,\neg D) \wedge \neg(\exists x\,.\,\neg(A \Rightarrow D)) \wedge (\exists x\,.\,\neg A \Rightarrow C \wedge B) \Rightarrow (\exists x\,.\,B)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3
Per dimostrare la formula applichiamo la Regola di Inferenza della Skolemizzazione e ci riduciamo a dimostrare

$$(\forall x\,.\,\neg D) \wedge \neg(\exists x\,.\,\neg(A \Rightarrow D)) \wedge (\exists x\,.\,\neg A \Rightarrow C \wedge B) \wedge (\neg A[a/x] \Rightarrow C[a/x] \wedge B[a/x]) \Rightarrow (\exists x\,.\,B)$$

Quindi partiamo dalla premessa:

$$\begin{array}{ll}
 & (\forall x\,.\,\neg D) \wedge \neg(\exists x\,.\,\neg(A \Rightarrow D)) \wedge (\exists x\,.\,\neg A \Rightarrow C \wedge B) \wedge (\neg A[a/x] \Rightarrow C[a/x] \wedge B[a/x]) \\
\Rightarrow & \{(\text{sempl-}\wedge)\} \\
 & (\forall x\,.\,\neg D) \wedge \neg(\exists x\,.\,\neg(A \Rightarrow D)) \wedge (\neg A[a/x] \Rightarrow C[a/x] \wedge B[a/x]) \\
\equiv & \{(\text{De Morgan}), \text{doppia negazione}\} \\
 & (\forall x\,.\,\neg D) \wedge (\forall x\,.\,A \Rightarrow D) \wedge (\neg A[a/x] \Rightarrow C[a/x] \wedge B[a/x]) \\
\Rightarrow & \{(\text{elim-}\forall)\ 2\ \text{volte, occorrenze positive}\} \\
 & \neg D[a/x] \wedge (A[a/x] \Rightarrow D[a/x]) \wedge (\neg A[a/x] \Rightarrow C[a/x] \wedge B[a/x]) \\
\equiv & \{(\text{contronominale})\} \\
 & \neg D[a/x] \wedge (\neg D[a/x] \Rightarrow \neg A[a/x]) \wedge (\neg A[a/x] \Rightarrow C[a/x] \wedge B[a/x]) \\
\Rightarrow & \{(\text{Modus Ponens}), \text{occorrenza positiva}\} \\
 & \neg A[a/x] \wedge (\neg A[a/x] \Rightarrow C[a/x] \wedge B[a/x]) \\
\Rightarrow & \{(\text{Modus Ponens})\} \\
 & C[a/x] \wedge B[a/x] \\
\Rightarrow & \{(\text{sempl-}\wedge)\} \\
 & B[a/x] \\
\Rightarrow & \{(\text{intro-}\exists)\} \\
 & (\exists x.B)
\end{array}$$

ESERCIZIO 4
Si formalizzi il seguente enunciato (assumendo **a, b, c: array [0, n) of int**):

"Ogni elemento dell'array **a** è uguale al massimo tra gli elementi di **b** che lo precedono
oppure al minimo tra gli elementi di **c** che lo seguono".

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

$$(\forall i.i \in [0, n) \Rightarrow a[i] = (max\ j : j \in [0, i).b[j]) \vee a[i] = (min\ j : j \in [i, n).c[j])).$$

ESERCIZIO 5

Si consideri il seguente frammento di programma annotato (assumendo **a: array [0, n) of int**):

```
sum, k := 0, 0;
```
$\{\mathsf{Inv}: k \in [0, n] \;\wedge\; (\forall j \,.\, j \in [0, k) \Rightarrow a[j] < w) \wedge sum * 2 = k * (k + 1)\}\{\text{t: } n - k\}$
```
while (a[k] < w) and (k < n) do
    k := k + 1;
    sum := sum + k
endw
```
$\{(\forall j \,.\, j \in [0, k) \Rightarrow a[j] < w) \wedge sum * 2 = k * (k + 1)\}$

Scrivere e dimostrare l'ipotesi di invarianza.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Invariante $Inv : k \in [0, n] \;\wedge\; (\forall j \,.\, j \in [0, k) \Rightarrow a[j] < w) \wedge sum * 2 = k * (k + 1)$
Funzione di terminazione $t : n - k$
Condizione $E : (a[k] < w)$ and $(k < n)$
Comando C : `k := k + 1; sum := sum + k`

L' *Ipotesi di Invarianza* ($\{Inv \wedge E\}\ C\ \{Inv \wedge def(E)\}$) in questo caso è

$\{k \in [0, n] \;\wedge\; (\forall j \,.\, j \in [0, k) \Rightarrow a[j] < w) \wedge sum * 2 = k * (k + 1) \wedge (a[k] < w) \wedge (k < n)\}$
`k := k + 1; sum := sum + k`
$\{k \in [0, n] \;\wedge\; (\forall j \,.\, j \in [0, k) \Rightarrow a[j] < w) \wedge sum * 2 = k * (k + 1) \;\wedge\; def((a[k] < w) \wedge (k < n))\}$

Siano P e Q la precondizione e la postcondizione della tripla ovvero

$$P = k \in [0, n] \;\wedge\; (\forall j \,.\, j \in [0, k) \Rightarrow a[j] < w) \wedge sum * 2 = k * (k + 1) \wedge (a[k] < w) \wedge (k < n)$$

$$Q = k \in [0, n] \;\wedge\; (\forall j \,.\, j \in [0, k) \Rightarrow a[j] < w) \wedge sum * 2 = k * (k + 1) \;\wedge\; def((a[k] < w) \wedge (k < n))$$

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare una asserzione R tale che le seguenti triple siano verificate:

(5.1) $\{P\}$ `k := k + 1` $\{R\}$

(5.2) $\{R\}$ `sum := sum + k` $\{Q\}$

Per determinare R, usiamo l'Assioma dell'Assegnamento in (5.2) e troviamo

$$def(sum + k) \wedge Q[^{sum+k}/_{sum}]$$
$\equiv$ {sostituzione, definizione di def}
$$k \in [0, n] \;\wedge\; (\forall j \,.\, j \in [0, k) \Rightarrow a[j] < w) \wedge (sum + k) * 2 = k * (k + 1) \;\wedge\; def((a[k] < w) \wedge (k < n))$$

Quindi resta da verificare la tripla (5.1) per il valore di R appena calcolato. Applicando la Regola dell'Assegnamento, dobbiamo verificare che

$$P \Rightarrow def(k+1) \wedge (k \in [0, n] \wedge (\forall j \,.\, j \in [0, k) \Rightarrow a[j] < w) \wedge (sum+k)*2 = k*(k+1) \wedge def((a[k] < w) \wedge (k < n)))[^{k+1}/_{k}]$$

Partiamo dalla conseguenza, applicando la sostituzione

$$def(k + 1) \wedge k + 1 \in [0, n] \;\wedge\; (\forall j \,.\, j \in [0, k + 1) \Rightarrow a[j] < w) \wedge (sum + k + 1) * 2 = (k + 1) * (k + 1 + 1) \wedge$$
$$\wedge\, def((a[k + 1] < w) \wedge (k + 1 < n))$$
$\equiv$ {definizione di def}
$$k + 1 \in [0, n] \;\wedge\; (\forall j \,.\, j \in [0, k + 1) \Rightarrow a[j] < w) \wedge (sum + k + 1) * 2 = (k + 1) * (k + 1 + 1) \;\wedge\; k + 1 \in dom(a)$$
$\equiv$ $\{$**Ip**: $(k \in [0, n]) \wedge (k < n) \wedge dom(a) = [0, n)$ $\}$
$$(\forall j \,.\, j \in [0, k + 1) \Rightarrow a[j] < w) \wedge (sum + k + 1) * 2 = (k + 1) * (k + 1 + 1)$$
$\equiv$ {(Intervallo-$\forall$)}
$$(\forall j \,.\, j \in [0, k) \Rightarrow a[j] < w) \wedge a[k] < w \wedge (sum + k + 1) * 2 = (k + 1) * (k + 1 + 1)$$

$\equiv$ {**Ip**: $a[k] < w \wedge (\forall j \,.\, j \in [0,k) \Rightarrow a[j] < w)$ }

$(sum + k + 1) * 2 = (k + 1) * (k + 1 + 1)$

$\equiv$ {calcolo}

$sum * 2 + 2 * k + 2 = k^2 + 3 * k + 2$

$\equiv$ {**Ip**: $sum * 2 = k * (k + 1)$ }

$k * (k + 1) + 2 * k + 2 = k^2 + 3 * k + 2$

$\equiv$ {calcolo}

T

ESERCIZIO 6

Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **a: array [0, n) of int**):

$$\{k \in [1, n) \;\wedge\; \big(\forall i \,.\, i \in [0, k) \Rightarrow (a[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x))\big)\}$$

```
a[k] := a[k-1] + k
```

$$\{\big(\forall i \,.\, i \in [0, k] \Rightarrow (a[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x))\big)\}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Per dimostrare le tripla applichiamo l' Assioma dell'Aggiornamento Selettivo e la Regola di Inferenza PRE. Quindi ci riduciamo a verificare che

$$k \in [1, n) \;\wedge\; \big(\forall i \,.\, i \in [0, k) \Rightarrow (a[i] = (\Sigma x : x \in [0, i] \,.\, x))\big) \Rightarrow$$
$$def(k) \wedge def(a[k-1] + k) \wedge k \in dom(a) \wedge \big(\forall i \,.\, i \in [0, k] \Rightarrow (b[i] = (\Sigma x : x \in [0, i] \,.\, x))\big)$$

dove $b = a \left[{}^{a[k-1]+k}/_{k}\right]$.

Partiamo dalla conseguenza

$def(k) \wedge def(a[k-1] + k) \wedge k \in dom(a) \wedge \big(\forall i \,.\, i \in [0, k] \Rightarrow (b[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x))\big)$

$\equiv$ {definizione di def}

$k - 1 \in dom(a) \wedge k \in dom(a) \wedge \big(\forall i \,.\, i \in [0, k] \Rightarrow (b[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x))\big)$

$\equiv$ {**Ip**: $k \in [1, n) \;\wedge\; dom(a) = [0, n)$ }

$(\forall i \,.\, i \in [0, k] \Rightarrow (b[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x)))$

$\equiv$ {(Intervallo-$\forall$)}

$(\forall i \,.\, i \in [0, k) \Rightarrow (b[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x)) \wedge b[k] = (\Sigma x : x \in [0, k].x)$

$\equiv$ {def di b, **Ip**:$(\forall i \,.\, i \in [0, k) \Rightarrow (a[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x)))$, $(\forall i \,.\, i \in [0, k) \Rightarrow i \neq k)$ }

$b[k] = (\Sigma x : x \in [0, k].x)$

$\equiv$ {**Ip**: def di b, sostituzione}

$a[k - 1] + k = (\Sigma x : x \in [0, k].x)$

$\equiv$ {(Intervallo-Σ)}

$a[k - 1] + k = (\Sigma x : x \in [0, k).x) + k$

$\equiv$ {**Ip**: $\big(\forall i \,.\, i \in [0, k) \Rightarrow (a[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x))\big)$}

$(\Sigma x : x \in [0, k - 1].x)) + k = (\Sigma x : x \in [0, k).x) + k$

$\equiv$ {(Intervallo-Σ)}

T