LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2014/15
Quarta esercitazione — 25/11/2014

1. Si dimostri che le seguenti formule del primo ordine sono valide:

   (a) $(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow \neg(\exists x.\neg R(x) \wedge \neg Q(x))$

   (b) $(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$

   (c) $(\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg(\exists x.R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee P(x))$

   (d) $(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))$

2. Si fornisca per ognuno dei seguenti enunciati una formula del primo ordine che lo formalizza usando l'interpretazione standard sui naturali e ipotizzando che **a** e **b** siano array con dominio $[0, n)$:

   (a) x è il numero di elementi dell'array **a** che sono maggiori della somma degli elementi che lo precedono;

   (b) x è uguale alla somma dei quadrati degli elementi dell'array **a** con indice pari;

   (c) l'array **b** contiene il doppio di ogni elemento dell'array **a**, ma contiene anche almeno un elemento dispari che è minore del minimo di **a**;

   (d) l'array **a** è simmetrico rispetto al suo elemento centrale;

   (e) l'array **b** è l'array **a** ordinato in senso crescente.

3. Si consideri il seguente array **a** con dominio $[0, 4)$:

3	10	5	11

   Si dimostri, utilizzando più volte la legge dell'intervallo per la sommatoria, la validità della seguente formula:

   $$m = (\Sigma x : x \in [0, 4) \wedge pari(x) \,.\, \mathbf{a}[x]^2) \qquad \equiv \qquad m = 34$$