CALCOLO PROPOSIZIONALE

Corso di Logica per la Programmazione

UN PROBLEMA DI DEDUZIONE LOGICA (da un test d'ingresso)

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Si sa che:
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
  - Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
- Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
  1) Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
  2) Nessuno dei tre amici è andato al cinema
  3) Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
  4) Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno

- *Come si formalizza? Come si può usare una dimostrazione per rispondere alla domanda?*

IL CALCOLO PROPOSIZIONALE

- E' il nucleo di (quasi) tutte le logiche. Limitato potere espressivo, ma sufficiente per introdurre il concetto di dimostrazione.
- Le *proposizioni* (*enunciati dichiarativi*) sono asserzioni a cui sia assegnabile in modo univoco un valore di verità in accordo ad una interpretazione del mondo a cui si riferiscono.
- "dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste una enunciazione vera oppure falsa"

  Aristotele

ESEMPI DI PROPOSIZIONI “ATOMICHE”

1. Roma è la capitale d’Italia
2. La Francia è uno stato del continente asiatico
3. $1+1 = 2$
4. $2+2 = 3$

ESEMPI DI NON PROPOSIZIONI

1. Che ora è?

2. Leggete queste note con attenzione

3. $X+1 = 2$

CONNETTIVI LOGICI

Connettivo	*Forma simbolica*	*Operazione corrispondente*
not	$\sim p$	negazione
and, e	$p \wedge q$	congiunzione
or, oppure	$p \vee q$	disgiunzione
se p allora q	$p \Rightarrow q$	implicazione
p se e solo se q	$p \equiv q$	equivalenza
p se q	$p \Leftarrow q$	conseguenza

SINTASSI DELLE PROPOSIZIONI (GRAMMATICA)

Prop ::=

$\quad$ Prop ≡ Prop | Prop ∧ Prop | Prop ∨ Prop |

$\quad$ Prop ⇒ Prop | Prop ⇐ Prop |

$\quad$ Atom | ~Atom

Atom ::=

$\quad$ **T** | **F** | Ide | (Prop)

Ide ::=

$\quad$ p | q | …| P | Q | …

SEMANTICA (SIGNIFICATO) DELLE PROPOSIZIONI

- Tabelle di verità dei connettivi logici:

P	Q	$\neg P$	$P \land Q$	$P \lor Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \equiv Q$	$P \Leftarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T

- Si osservi in particolare il valore di verità di un'implicazione (o di una conseguenza)

CALCOLO PROPOSIZIONALE PER FORMALIZZARE ENUNCIATI: ESEMPIO

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema.
  - *Introduciamo tre proposizioni:*
    - $A \equiv$ “Antonio va al cinema”
    - $B \equiv$ “Bruno va al cinema”
    - $C \equiv$ “Corrado va al cinema”
- Si sa che:
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
    - $C \Rightarrow A$
  - Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
    - $A \Rightarrow B$

CALCOLO PROPOSIZIONALE PER FORMALIZZARE ENUNCIATI: ESEMPIO

- Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
  - Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
    - $C \Rightarrow B$
  - Nessuno dei tre amici è andato al cinema
    - $\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C$
  - Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
    - $B \Rightarrow C$
  - Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
    - $\sim C \Rightarrow \sim B$
- Per rispondere alla domanda, dobbiamo capire quale di queste quattro proposizioni è *conseguenza logica* delle proposizioni precedenti

FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI: ESEMPI

- Piove e fa molto freddo

  P = “piove”, R = “fa molto freddo” $[\, P \wedge R \,]$
- Fa freddo, ma non piove

  $[\, R \wedge \sim P \,]$
- Se ci sono nuvole e non c’è vento, allora piove

  N = “ci sono nuvole”, V = “c'e' vento” $[\, (N \wedge \sim V) \Rightarrow P \,]$
- Piove solo se ci sono nuvole e non c’è vento

  $[\, P \Rightarrow (N \wedge \sim V) \,]$
- Nevica, ma non fa freddo se ci si copre

  Ne = “nevica”, C = “ci si copre” $[\, Ne \wedge (C \Rightarrow \sim R) \,]$
- Se ci si copre, allora fa freddo o nevica

  $[\, (C \Rightarrow R) \vee Ne \,]$

Formalizzazione di implicazioni in linguaggio naturale

Scrivere la proposizione rappresentata da ognuna delle seguenti frasi in italiano:

- Se P allora Q $[P \Rightarrow Q]$
- P è una conseguenza di Q $[Q \Rightarrow P]$
- P è condizione necessaria e sufficiente per Q $[P \equiv Q]$
- P è condizione necessaria per Q $[Q \Rightarrow P]$
- P è condizione sufficiente per Q $[P \Rightarrow Q]$
- P vale solo se vale Q $[P \Rightarrow Q]$
- P vale se vale Q $[Q \Rightarrow P]$
- P vale se e solo se vale Q $[P \equiv Q]$
- Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno $[A \Rightarrow B]$

TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

- Una **tautologia** è una formula del calcolo proposizionale che vale **T** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
  - Esempio: **p v ~p** (vedi tabella di verità)
- Una **contraddizione** è una formula che vale **F** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
- Quindi **P** è una tautologia se e solo se **~P** è una contraddizione

IMPLICAZIONI E EQUIVALENZE TAUTOLOGICHE

- Diciamo che

  p implica tautologicamente q

  se e solo se

  $p \Rightarrow q$ è una tautologia

  p è tautologicamente equivalente a q

  se e solo se

  $p \equiv q$ è una tautologia

- Praticamente tutti i problemi nel Calcolo Proposizionale si riducono a dimostrare che una proposizione è una tautologia.
- Come si può dimostrare?

DIMOSTRAZIONE DI TAUTOLOGIE

- Per dimostrare che *p* è una tautologia possiamo
  - Usare le tabelle di verità
    - Del tutto meccanico, richiede di considerare 2^n casi, dove *n* è il numero di variabili proposizionali in *p*
  - Cercare di costruire una dimostrazione
    - Usando delle leggi (tautologie già dimostrate)
    - Usando opportune *regole di inferenza*
    - Si possono impostare vari tipi di dimostrazione
  - Mostrare che non è una tautologia
    - individuando valori delle variabili proposizionali che rendono falsa *p*