DIMOSTRAZIONI DI TAUTOLOGIE

Corso di Logica per la Programmazione

DIMOSTRAZIONE DI TAUTOLOGIE

Abbiamo detto che: Per dimostrare che p è una tautologia possiamo:

- Usare le tabelle di verità, sfruttando quelle dei connettivi
  - Del tutto meccanico, richiede di considerare 2^n casi, dove n è il numero di variabili proposizionali in p
- Cercare di costruire una dimostrazione
  - Usando delle leggi (tautologie già dimostrate)
  - Usando opportune *regole di inferenza*
  - Si possono impostare vari tipi di dimostrazioni
- Mostrare che non è una tautologia
  - individuando valori delle variabili proposizionali che rendono falsa p

- Vediamo come si costruiscono le tabelle di verità

Interpretazione di una formula proposizionale

- **Interpretazione:** funzione da variabili proposizionali a {T, F}
- Un'interpretazione determina il valore di verità di una formula
  - Formula $(P \wedge Q) \vee \neg R$
  - Interpretazione $\{P \mapsto T, Q \mapsto F, R \mapsto T\}$
  - Valore di verità usando una tabella (sfruttando quella dei connettivi):

P	Q	R	$(P$	$\wedge$	$Q)$	$\vee$	$\neg$	R
T	F	F	T	F	F	**T**	T	F
			(1)	(2)	(1)	**(3)**	(2)	(1)

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \equiv Q$	$P \Leftarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T

Tabella di Verità di una formula: raccoglie tutte le interpretazioni

- Un esempio:

P	Q	R	$(P$	$\wedge$	$Q)$	$\vee$	$\neg$	R
T	T	T	T	T	T	**T**	F	T
T	T	F	T	T	T	**T**	T	F
T	F	T	T	F	F	**F**	F	T
T	F	F	T	F	F	**T**	T	F
F	T	T	F	F	T	**F**	F	T
F	T	F	F	F	T	**T**	T	F
F	F	T	F	F	F	**F**	F	T
F	F	F	F	F	F	**T**	T	F
			(1)	(2)	(1)	(3)	(2)	(1)

DIMOSTRAZIONE DI TAUTOLOGIE

Abbiamo detto che: Per dimostrare che *p* è una tautologia possiamo:

- Usare le tabelle di verità, sfruttando quelle dei connettivi
  - Del tutto meccanico, richiede di considerare 2^n casi, dove *n* è il numero di variabili proposizionali in *p*
- Cercare di costruire una dimostrazione
  - Usando delle leggi (tautologie già dimostrate)
  - Usando opportune *regole di inferenza*
  - Si possono impostare vari tipi di dimostrazioni
- Mostrare che non è una tautologia
  - individuando valori delle variabili proposizionali che rendono falsa *p*

DIMOSTRAZIONI: COMINCIAMO DALL'ARITMETICA

- Mostriamo che $\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2-b^2}$

$\boldsymbol{(a + b)(a - b)}$

= {distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione, ovvero, in formule, $(y+z)x = yx+zx$ applicata con a al posto di y, b al posto di z e $(a-b)$ al posto di x}

$\boldsymbol{a(a - b) + b(a - b)}$

= {distributività della moltiplicazione rispetto alla sottrazione, due volte, ovvero, in formule, $x(y-z) = xy-xz$ applicata la prima volta con $x=a$, $y=a$, $z=b$ e la seconda con $x=b$, $y=a$, $z=b$}

$\boldsymbol{(aa - ab) + (ba - bb)}$

= { $xx=x^2$, e associatività dell'addizione }

$\boldsymbol{a^2 - ab + ba - b^2}$

= { commutatività della moltiplicazione, e $-x+x=0$ }

$\boldsymbol{a^2 + 0 - b^2}$

= { $x + 0 = x$ }

$\boldsymbol{a^2 - b^2}$

STRUTTURA DI UNA SEMPLICE DIMOSTRAZIONE

- Nella dimostrazione vista abbiamo
  - una sequenza di eguaglianze
    - es: $\boldsymbol{a^2 + 0 - b^2 = a^2 - b^2}$
  - ogni eguaglianza ha come giustificazione una o più ***leggi*** (dell'aritmetica)
    - es: $\{\, \boldsymbol{x + 0 = x} \,\}$
  - La correttezza di ogni eguaglianza è basata su una ***regola di inferenza***: il principio di sostituzione. Informalmente:

"Sostituendo eguali con eguali il valore non cambia"

- es: dalla legge sappiamo che $\boldsymbol{a^2 + 0 = a^2}$
- sostituendo $\boldsymbol{a^2 + 0}$ con $\boldsymbol{a^2}$ in $\boldsymbol{a^2 + 0 - b^2}$ otteniamo $\boldsymbol{a^2 - b^2}$

IL PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE

- Esprime una proprietà fondamentale dell'***eguaglianza***.
- Nel Calcolo Proposizionale esprime una proprietà dell'***equivalenza***.
- "Se $P = Q$ allora il valore di una espressione R in cui compare P non cambia se P è sostituito con Q"
- In formule, $R = R\,[Q / P]$
- Qui $P = Q$ è una legge, e $R = R[Q / P]$ è l'eguaglianza da essa giustificata, grazie al principio di sostituzione

LEGGI DEL CALCOLO PROPOSIZIONALE

- Una ***legge*** è una tautologia.
- Di solito una tautologia viene chiamata “legge” quando descrive una proprietà di uno o più connetttivi logici, o quando è usata come giustificazione nelle dimostrazioni.
- Per ogni legge che introduciamo, bisognerebbe verificare che sia una tautologia
  - a volte è ovvio
  - a volte lo mostreremo con tabelle di verità
  - a volte presenteremo una dimostrazione in cui usiamo ***solo leggi introdotte in precedenza***
  - spesso lo lasceremo come esercizio...

LEGGI PER L'EQUIVALENZA (≡)

- $p \equiv p$ (Riflessività)
- $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$ (Simmetria)
- $((p \equiv q) \equiv r) \equiv (p \equiv (q \equiv r))$ (Associatività)
- $(p \equiv \mathbf{T}) \equiv p$ (Unità)
- $((p \equiv q) \wedge (q \equiv r)) \Rightarrow (p \equiv r)$ (Transitività)

- Esempio di dimostrazione:

(Unità)

P	$(P$	$\equiv$	$T)$	$\equiv$	P
T	T	T	T	**T**	T
F	F	F	T	**T**	F
	(1)	(2)	(1)	(3)	(1)

LEGGI PER CONGIUNZIONE E DISGIUNZIONE

$p \lor q \equiv q \lor p$	(Commutatività)
$p \land q \equiv q \land p$	
$p \lor (q \lor r) \equiv (p \lor q) \lor r$	(Associatività)
$p \land (q \land r) \equiv (p \land q) \land r$	
$p \lor p \equiv p$	(Idempotenza)
$p \land p \equiv p$	
$p \land \mathbf{T} \equiv p$	(Unità)
$p \lor \mathbf{F} \equiv p$	
$p \land \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	(Elemento Assorbente)(Zero) (Dominanza)
$p \lor \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$	
$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$	(Distributività)
$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$	

- Esercizio: dimostrare alcune leggi con tabelle di verità

DIMOSTRAZIONI DI EQUIVALENZE TAUTOLOGICHE

- Come per equazioni algebriche si può provare $\mathbf{P_1 \equiv P_n}$ così:

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathbf{P_1} \\
\equiv & \{\text{giustificazione}_1\} \\
 & P_2 \\
 & \ldots\ldots.. \\
\equiv & \{\text{giustificazione}_{n-1}\} \\
 & \mathbf{P_n}
\end{array}
$$

- dove ogni passo ha la forma

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathbf{R} \\
\equiv & \mathbf{\{ P \equiv Q \}} \\
 & \mathbf{R[Q/P]}
\end{array}
$$

- Ogni passo è corretto per il *Principio di Sostituzione*

UNA SEMPLICE DIMOSTRAZIONE

Teorema: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$

$(p \vee q) \vee (p \vee r)$

$\equiv$ { $p \vee q \equiv q \vee p$ (Commutatività)}

$(q \vee p) \vee (p \vee r)$

$\equiv$ {Associatività}

$q \vee (p \vee (p \vee r))$

$\equiv$ {Associatività}

$q \vee ((p \vee p) \vee r)$

$\equiv$ {Idempotenza}

$q \vee (p \vee r)$

$\equiv$ {Associatività}

$(q \vee p) \vee r$

$\equiv$ {Commutavità}

$(p \vee q) \vee r$

$\equiv$ {Associatività}

$p \vee (q \vee r)$

COMMENTI

- La dimostrazione fatta usando le leggi garantisce la correttezza della dimostrazione grazie al Principio di Sostituzione
- Naturalmente la tecnica non automatizza le dimostrazioni. Rimane a carico nostro la scelta delle leggi da usare, da quale membro della equivalenza partire, l'organizzazione della sequenza dei passaggi
- Nel seguito semplificheremo le dimostrazioni, saltando passi ovvi come l'applicazione di Associatività, Commutatività e Idempotenza

LEGGI DELLA NEGAZIONE

$\sim(\sim p) \equiv p$	(Doppia negazione)
$p \lor \sim p \equiv \mathbf{T}$	(Terzo escluso)
$p \land \sim p \equiv \mathbf{F}$	(Contraddizione)
$\sim(p \land q) \equiv \sim p \lor \sim q$	(De Morgan)
$\sim(p \lor q) \equiv \sim p \land \sim q$	
$\sim\mathbf{T} \equiv \mathbf{F}$	(**T**:**F**)
$\sim\mathbf{F} \equiv \mathbf{T}$	(**F:T**)

- Esercizio: dimostrare alcune leggi con tabelle di verità

LEGGI DELL'IMPLICAZIONE

- $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ (elim- $\Rightarrow$)

P	Q	$(P$	$\Rightarrow$	$Q)$	$\equiv$	$(\neg$	P	$\vee$	$Q)$
T	T	T	T	T	**T**	F	T	T	T
T	F	T	F	F	**T**	F	T	F	F
F	T	F	T	T	**T**	T	F	T	T
F	F	F	T	F	**T**	T	F	T	F
		(1)	(2)	(1)	(4)	(2)	(1)	(3)	(1)

- $(p \equiv q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ (elim- $\equiv$)
- $(p \Leftarrow q) \equiv (q \Rightarrow p)$ (elim-$\Leftarrow$)

COMMENTI

- Si può mostrare che **tutte** le tautologie del Calcolo Proposizionale sono dimostrabili a partire dall'insieme delle leggi visto sinora

- Conviene comunque, per motivi di espressività e compattezza delle definizioni, introdurre altre leggi che corrispondono, per esempio, ad assodate tecniche di dimostrazione.