



LOGICA DEL PRIMO ORDINE: MOTIVAZIONI, SINTASSI E INTERPRETAZIONI

Corso di Logica per la Programmazione

LIMITI DEL CALCOLO PROPOSIZIONALE

- Nella formalizzazione di enunciati dichiarativi, gli *enunciati atomici* non hanno struttura (sono rappresentati da variabili proposizionali)
 - Es: “Alberto va al cinema con Bruno o va al teatro con Carlo”
Introduciamo 4 proposizioni atomiche:
 - $AC \equiv$ Alberto va al cinema
 - $BC \equiv$ Bruno va al cinema
 - $AT \equiv$ Alberto va al teatro
 - $CT \equiv$ Carlo va al teatro
 - Formula proposizionale: $(AC \wedge BC) \vee (AT \wedge CT)$
 - Ma “Alberto” “Bruno” ... “cinema” ..., gli *individui* del nostro discorso e le relazioni tra di essi (“andare al”) scompaiono...



LIMITI DEL CALCOLO PROPOSIZIONALE

- Le formule proposizionali possono descrivere relazioni logiche tra un numero **finito** di enunciati, ma
 - Vorremmo esprimere proprietà di un'**infinità** di individui:
“tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi”
In CP(?): (“4 non è primo”) \wedge (“6 non è primo”) \wedge ... **NO!**
 - Vorremmo poter esprimere proprietà “generalì” come
“se x è pari allora x+1 è dispari”
 - ... e riconoscere che da esse derivano proprietà specifiche come
“se 4 è pari allora 5 è dispari”
- Anche se descriviamo un numero finito di enunciati, vorremmo poterli descrivere in modo “compatto”:
 - Es: “Tutti gli studenti di LPP vanno al cinema”
 - (S1 \wedge S2 \wedge S3 \wedge S141 \wedge S142) ???
 - Es: “Tutti gli studenti di LPP tranne uno....” ????



VERSO LA LOGICA DEL PRIMO ORDINE

- Presenteremo sintassi, semantica e “proof system” di una logica che estende il Calcolo Proposizionale.

Con le formule della **Logica del Primo Ordine (LP1)**:

- si possono denotare/rappresentare esplicitamente gli elementi del dominio di interesse (gli **individui**, usando i **termini**)
- si possono esprimere **proprietà** di individui e **relazioni** tra due o più individui (usando i **predicati**)
- si può **quantificare** una proprietà, dicendo che vale per almeno un individuo, o per tutti gli individui (idem per le relazioni)
- La **semantica** di una formula del **LP1** è sempre un valore booleano, ma determinato in modo molto più complesso
- Come per il Calcolo Proposizionale, ci interessano le formule che sono “sempre vere” (**valide**)
- Non esistono tabelle di verità: per vedere se una formula è valida occorre dimostrarlo (e non sempre è possibile)



ESPRESSIVITA' DELLA LOGICA DEL PRIMO ORDINE

- Esempi (li analizzeremo meglio in seguito):
 - Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi
($\forall x. \text{pari}(x) \wedge x > 2 \Rightarrow \sim\text{primo}(x)$)
 - Se x è pari allora $x+1$ è dispari (*)
($\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(x + 1)$)
 - (*) implica “se 4 è pari allora 5 è dispari”
($\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(x + 1)$) \Rightarrow ($\text{pari}(4) \Rightarrow \text{dispari}(5)$)
 - Tutti gli studenti di LPP vanno al cinema
($\forall x. \text{segue}(x, \text{LPP}) \Rightarrow \text{vaCinema}(x)$)
 - Tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema
($\exists x. \text{segue}(x, \text{LPP}) \wedge \sim\text{vaCinema}(x) \wedge$
($\forall y. \text{segue}(y, \text{LPP}) \wedge \sim(x = y) \Rightarrow \text{vaCinema}(y)$))



LA SINTASSI DELLA LOGICA DEL PRIMO ORDINE: L'ALFABETO

- Un **alfabeto** del primo ordine comprende:
 - Un insieme V di simboli di **variabile**
 - Un insieme C di simboli di **costante**
 - Un insieme F di simboli di **funzione**, ognuno con la sua **arietà** (o **numero di argomenti**)
 - Un insieme P di simboli di **predicato**, ognuno con la sua **arietà**
 - I simboli $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ (*connettivi logici*)
 - I simboli \forall, \exists (*quantificatori*)
 - I simboli $()$ [parentesi] , [virgola] . [punto]



LA SINTASSI DELLA LOGICA DEL PRIMO ORDINE: LA GRAMMATICA

Fbf ::= Fbf \equiv Fbf | Fbf \wedge Fbf | Fbf \vee Fbf |
Fbf \Rightarrow Fbf | Atom | \sim Atom

Atom ::= T | F | Pred | (Fbf) | FbfQuant

FbfQuant ::= (\forall Var.Fbf) | (\exists Var.Fbf)

Pred ::= PIde | PIde (Term {, Term})

Term ::= Const | Var | FIde (Term {, Term})

dove $\text{Var} \in V$ è un simbolo di **variabile**,
 $\text{Const} \in C$ è un simbolo di **costante**,
 $\text{FIde} \in F$ è un simbolo di **funzione**, e
 $\text{PIde} \in P$ è un simbolo di **predicato**.

- Estende la grammatica del **Calcolo Proporzionale** con nuove produzioni



LA SINTASSI DELLA LOGICA DEL PRIMO ORDINE: I TERMINI

Term ::= Const | Var | FIdc (Term {, Term})

- I termini denotano “elementi del dominio di interesse” (“individui”). Sono costruiti induttivamente così:
 - Ogni costante in C è un termine
 - Ogni variabile in V è un termine
 - Se f è un simbolo di funzione in F con arietà n e t_1, \dots, t_n sono termini, allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine


○ Esempi:

- x $x \in V$
- a $a \in C$
- $g(a)$ $g \in F$ con arietà 1
- $f(x, g(a))$ $f \in F$ con arietà 2

Notazione: I simboli di funzione **binari** a volte sono rappresentati con **notazione infissa**. Es:
 $x + (a * g(x))$ è un termine
con $+, * \in F$ con arietà 2



LA SINTASSI DELLA LOGICA DEL PRIMO ORDINE: LE FORMULE

- Le formule rappresentano gli enunciati dichiarativi
 - Se $p \in \mathbf{P}$ è un simbolo di predicato con arietà n e t_1, \dots, t_n sono termini allora $p(t_1, \dots, t_n)$ è una formula.
 - Se $p \in \mathbf{P}$ ha arietà 0 (zero) è detto **formula atomica**. Corrisponde a una variabile proposizionale nel Calcolo Proposizionale, e lo scriviamo p invece di $p()$
 - A volte usiamo **notazione infissa** per simboli di arietà 2
Es: $x = y$ $z \leq f(x)$ con $=, \leq \in \mathbf{P}$ con arietà 2
 - Se P è una formula allora $\sim P$ è una formula
 - Se P e Q sono formule allora $P \wedge Q, P \vee Q, P \Rightarrow Q, P \equiv Q$ sono formule
 - Se P è una formula e $x \in V$, allora $(\forall x.P)$ “**per ogni x vale P**” e $(\exists x.P)$ “**esiste un x tale che P**” sono formule
 - Se P è una formula allora anche (P) è una formula
- 

SINTASSI DELLE FORMULE: ESEMPI

- Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi

$$(\forall x. \text{pari}(x) \wedge x > 2 \Rightarrow \sim \text{primo}(x))$$

- Se x è pari allora il successore di x è dispari

$$(\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(\text{succ}(x)))$$

- “Se x è pari allora x+1 è dispari” implica “se 4 è pari allora 5 è dispari”

$$(\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(x + 1)) \Rightarrow (\text{pari}(4) \Rightarrow \text{dispari}(5))$$

- Tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema

$$(\exists x. \text{segue}(x, \text{LPP}) \wedge \sim \text{vaCinema}(x) \wedge \\ (\forall y. \text{segue}(y, \text{LPP}) \wedge \sim (x = y) \Rightarrow \text{vaCinema}(y)))$$

Simboli di Variabile?

Simboli di Funzione?

Simboli di Costante?

Simboli di Predicato?



OCCORRENZE DI VARIABILI LIBERE E LEGATE

- In una formula quantificata come $(\exists x. P)$ o $(\forall y. P)$ la sottoformula P è detta la **portata** del quantificatore.
- Una occorrenza di variabile x è **legata** se compare nella portata di un quantificatore $\exists x$ oppure $\forall x$. Altrimenti è detta **libera**.
- Es: $(\forall y. z = y \vee (x = y \wedge (\exists x. x = z \vee z = y)))$
 - Portata di $\exists x$?
 - Portata di $\forall y$?
 - Occorrenze di variabili **legate** ?
 - Occorrenze di variabili **libere** ?



FORMULE APERTE E CHIUSE

- Il nome di una variabile legata può essere cambiato grazie alle **leggi di ridenominazione**:

$$(\forall x.P) \equiv (\forall y.P[y/x]) \quad \text{se } y \text{ non compare in } P \quad (\text{Ridenom.})$$

$$(\exists x.P) \equiv (\exists y.P[y/x]) \quad \text{se } y \text{ non compare in } P \quad (\text{Ridenom.})$$

- Esempio: $(\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(\text{succ}(x))) \equiv$
 $\equiv (\forall y. (\text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(\text{succ}(x)))[y/x])$
 $\equiv (\forall y. \text{pari}(y) \Rightarrow \text{dispari}(\text{succ}(y)))$

- Una formula che contiene occorrenze di variabili libere è detta **aperta**
 - Spesso scriveremo $P(x)$ per indicare che x è libera nella formula P
- Una formula senza variabili libere è detta **chiusa**. Considereremo principalmente formule chiuse.



INTERPRETAZIONI E SEMANTICA

- Una **intepretazione** assegna la semantica ad una formula chiusa fissando il significato dei simboli che compaiono:
 - Il **dominio** di interesse (un insieme)
 - A quali **elementi** del dominio corrispondono i simboli in \mathbf{C}
 - A quali **funzioni** sul dominio corrispondono i simboli in \mathbf{F}
 - A quali **predicati (proprietà o relazioni)** corrispondono i simboli in \mathbf{P}
- Componendo i valori delle formule atomiche nelle formule composte si arriva a stabilire il valore della formula complessiva
- Procedimento simile a quello del calcolo proposizionale, ma più complesso dalla necessità di calcolare funzioni e predicati, e dalla presenza dei quantificatori



ESEMPIO: SEMANTICA DI FORMULA DIPENDE DA INTERPRETAZIONE

- Consideriamo la formula:

$$(\forall x. p(x) \vee q(x))$$

- Interpretazione 1:

- Il dominio è quello degli esseri umani
- Il predicato p significa “essere maschio”
- Il predicato q significa “essere femmina”
 - La formula è vera

- Interpretazione 2:

- Il dominio è quello dei numeri naturali
- Il predicato p significa “essere numero primo”
- Il predicato q significa “essere numero pari”
 - La formula è falsa



INTERPRETAZIONE: DEFINIZIONE FORMALE

- Dato un linguaggio del primo ordine, ovvero fissati C , F , V , P , una **intepretazione** $I = (D, \alpha)$ è costituita da:
 - Un insieme D , detto dominio di intepretazione
 - Una funzione di associazione α che associa:
 - ad ogni **costante** $c \in C$ del linguaggio **un elemento** di D , rappresentato da $\alpha(c)$
 - ad ogni **simbolo di funzione** $f \in F$ di arietà n **una funzione** $\alpha(f)$ che data una n -upla di elementi di D restituisce un elemento di D
 - ad ogni simbolo di predicato $p \in P$ di arietà zero (un **atomo**) un **valore di verità**
 - ad ogni **simbolo di predicato** $p \in P$ di arietà n un **predicato n -ario**, cioè a funzione che data una n -upla di elementi di D restituisce un valore di verità



ESEMPIO DI SEMANTICA: ALFABETO E INTERPRETAZIONI

○ Sia dato l'alfabeto

$$\bullet \quad C = \{a, b, c\} \quad F = \{\} \quad P = \{p\} \quad V = \{x, y, \dots\}$$

○ Interpretazione I_1

- **Dominio:** le città italiane
- Le costanti sono **Milano, Roma, Pontedera**, corrispondenti a **a, b e c**
- $p(x) \equiv T$ se **x** è capoluogo di provincia, **F** altrimenti

○ Interpretazione I_2

- **Dominio:** l'insieme di numeri naturali $\{5, 10, 15\}$
- Le costanti sono **5, 10, e 15** corrispondenti a **a, b e c**
- $p(x) \equiv T$ se **x** è multiplo di **5**, **F** altrimenti

○ Interpretazione I_3

- come I_2 , ma **Dominio:** i numeri naturali



ESEMPIO DI SEMANTICA: VALORE DI VERITA' DI FORMULE

	Dominio	a	b	c	p(x)
I_1	città italiane	Milano	Roma	Pontedera	x capoluogo
I_2	{5,10,15}	5	10	15	x multiplo di 5
I_3	numeri naturali	5	10	15	x multiplo di 5

Formula	Valore in I_1	Valore in I_2	Valore in I_3
$p(a)$	T	T	T
$p(b)$	T	T	T
$p(c)$	F	T	T
$p(a) \wedge p(c)$	F	T	T
$(\exists x.p(x))$	T	T	T
$(\forall x.p(x))$	F	T	F
$(\exists x.p(x)) \wedge (\exists y.\sim p(y))$	T	F	T



FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI: LINEE GUIDA

- Per formalizzare un enunciato **E** dobbiamo fornire:
 - un alfabeto $\mathbf{A} = (C, F, P, V)$ e un'interpretazione $\mathbf{I} = (D, \alpha)$
 - una **formula** del primo ordine che, per l'interpretazione **I**, sia vera se e solo se l'enunciato **E** è vero
- Finora abbiamo associato un valore di verità alle formule in modo informale: vedremo in seguito la definizione formale della semantica



FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI: LINEE GUIDA

Dato un enunciato E , per identificare l'alfabeto A e l'interpretazione $I = (D, \alpha)$:

- individuiamo il dominio D di cui parla l'enunciato
- per ogni individuo $d \in D$ menzionato in E , introduciamo un simbolo di **costante** $c \in C$ e fissiamo $\alpha(c) = d$
- per ogni operatore op menzionato in E che applicato a elementi di D restituisce un individuo di D , introduciamo un simbolo di **funzione** $f \in F$ e fissiamo $\alpha(f) = op$
- per ogni formula atomica, proprietà di individui o relazione tra individui R menzionata in E , introduciamo un simbolo di **predicato** $p \in P$ e fissiamo $\alpha(p) = R$



FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI: ESEMPIO

- **E** = “Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi”
 - Dominio: numeri naturali \mathfrak{N} (o anche: numeri interi)
 - Elementi del dominio menzionati in **E**: “due”
 - Introduciamo la costante $\mathbf{2} \in \mathbf{C}$ con $\alpha(\mathbf{2}) = \underline{2} \in \mathfrak{N}$
 - Proprietà o relazioni tra naturali menzionate in **E**:
 - “ n è pari”: introduciamo $\mathbf{pari} \in \mathbf{P}$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{pari})(n) \equiv \mathbf{T}$ se $n \in \mathfrak{N}$ è pari, **F** altrimenti
 - “ n è primo”: introduciamo $\mathbf{primo} \in \mathbf{P}$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{primo})(n) \equiv \mathbf{T}$ se $n \in \mathfrak{N}$ è primo, **F** altrimenti
 - “ n è maggiore di m ”: introduciamo $\mathbf{>} \in \mathbf{P}$ con arietà 2 e $\alpha(\mathbf{>})(n, m) \equiv \mathbf{T}$ se n è maggiore di m , **F** altrimenti
 - Formula: $(\forall x. \mathbf{pari}(x) \wedge x > \mathbf{2} \Rightarrow \sim \mathbf{primo}(x))$



FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI: ESEMPIO

- **E** = “Se x è pari allora il successore di x è dispari”
 - Dominio: numeri naturali \mathbb{N}
 - Operatori sul dominio menzionati in **E**: “successore”
 - Introduciamo il simbolo $\mathbf{succ} \in F$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{succ})(n) = n + 1$.
 - Proprietà o relazioni tra naturali menzionate in **E**:
 - “ n è pari”: introduciamo $\mathbf{pari} \in P$ come prima
 - “ n è dispari”: introduciamo $\mathbf{dispari} \in P$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{dispari})(n) \equiv \mathbf{T}$ se $n \in \mathbb{N}$ è dispari, \mathbf{F} altrimenti
 - Formula: ($\forall x. \mathbf{pari}(x) \Rightarrow \mathbf{dispari}(\mathbf{succ}(x))$)



FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI: ESEMPIO

- **E** = “Due persone sono parenti se hanno un antenato in comune”
 - Dominio: l’insieme delle persone
 - Costanti, operatori menzionati in **E**: nessuno
 - Proprietà o relazioni tra persone menzionate in **E**:
 - “ d_1 e d_2 sono parenti”: introduciamo **parenti** $\in P$ con arietà 2 e $\alpha(\text{parenti})(d_1, d_2) \equiv \mathbf{T}$ se d_1 e d_2 sono parenti, **F** altrimenti
 - “ d_1 è antenato di d_2 ”: introduciamo **antenato** $\in P$ con arietà 2 e $\alpha(\text{antenato})(d_1, d_2) \equiv \mathbf{T}$ se d_1 è antenato di d_2 , **F** altrimenti

- Formula:

$$((\forall x. (\forall y. (\exists z. \text{antenato}(z, x) \wedge \text{antenato}(z, y)) \Rightarrow \text{parenti}(x, y))))$$
