LOGICA DEL PRIMO ORDINE CON INSIEMI E INTERVALLI

Corso di Logica per la Programmazione

RAPPRESENTAZIONI INTENSIONALI ED ESTENSIONALI DI INSIEMI

- Assumiamo come universo i naturali e i sottoinsiemi di naturali
- Rappresentazione estensionale (*in extenso*) di insiemi

  Divisori_di_30 = $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
- Rappresentazione intensionale (*in intenso*) di insiemi

  Divisori_di_30 = $\{x \mid x \leq 30 \wedge (\exists n.\ x \times n = 30)\}$
- Rappresentazione intensionale per insiemi infiniti

  Multipli_di_7 = $\{x \mid (\exists n.\ x = n \times 7)\}$

NOTAZIONE PER INSIEMI

- Estendiamo il linguaggio del primo ordine per rappresentare insiemi di naturali in modo intensionale
  - Term ::= Const | Var | FIde(Term {, Term}) | **‘{’ Var ‘|’ Fbf ‘}’**
  - Abbiamo termini come $\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{P} \}$ dove $\mathbf{x}$ è una variabile, e $\mathbf{P}$ una formula (tipicamente con $\mathbf{x}$ libera). $\mathbf{x}$ è legata in $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{P}\}$
  - Nuovo simbolo di predicato binario $\in$, definito dalla legge:

    (def-$\in$) $\quad \mathbf{y} \in \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{P} \} \equiv \mathbf{P[y/x]}$
  - Nuova costante $\varnothing$, definita come $\varnothing = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{F} \}$
  - Dimostriamo che $(\forall y.\ y \in \varnothing \equiv \mathbf{F})$ è valida:

    $\mathbf{y} \in \varnothing$ [Per generalizzazione]

    $\equiv$ {def di $\varnothing$ }

    $y \in \{ x \mid \mathbf{F} \}$

    $\equiv$ {def di $\in$ }

    $\mathbf{F}$

LEGGI PER INSIEMI

- (Ins: $\equiv$)

  $$(\forall x.\ P \equiv Q) \Rightarrow \{x \mid P\} = \{x \mid Q\}$$

- (Ins: $\Rightarrow$)

  $$(\forall x.\ P \Rightarrow Q) \Rightarrow \{x \mid P\} \subseteq \{x \mid Q\}$$

- Dimostriamo la seconda

  $z \in \{x \mid P\}$

  $\equiv$ $\qquad$ {def-$\in$}

  $P\ [z/x]$

  $\Rightarrow$ $\qquad$ {Ip: $(\forall x.\ P \Rightarrow Q)$, Elim-$\forall$}

  $Q\ [z/x]$

  $\equiv$ $\qquad$ {def-$\in$}

  $z \in \{x \mid Q\}$.

UGUAGLIANZE E DISUGUAGLIANZE

Estendiamo ora il linguaggio del primo ordine con i predicati binari $\leq$ e $\geq$ (con l'ovvio significato).

I predicati $=$, $\leq$ e $\geq$ soddisfano i seguenti assiomi (nei quali la quantificazione universale è implicita):

- $x = x$ (riflessività-=)
- $(x = y) \Rightarrow (y = x)$ (simmetria-=)
- $(x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z)$ (transitività-=)

- $x \leq x$ (riflessività-≤)
- $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$ (antisimmetria-≤)
- $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$ (transitività-≤)
- $(x \leq y) \vee (y \leq x)$ (totalità-≤)
- $(x \geq y) \equiv (y \leq x)$ (def-≥)

UN PO' DI TERMINOLOGIA...

- Una relazione binaria R è una **relazione di equivalenza** se è
  - riflessiva: $x \, R \, x$
  - simmetrica: $x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$
  - transitiva: $(x \, R \, y) \wedge (y \, R \, z) \Rightarrow x \, R \, z$
  - Esempio: l'uguaglianza =, l'equivalenza $\equiv$

- Una relazione binaria è una **relazione di ordinamento** se è
  - riflessiva, transitiva e anti-simmetrica: $(x \, R \, y) \wedge (y \, R \, x) \Rightarrow x = y$
  - Esempio: inclusione tra insiemi
- Una relazione di ordinamento è **totale** se
  - per ogni x, y $(x \, R \, y) \vee (y \, R \, x)$
  - Esempio: $\leq$ su numeri naturali

INTERVALLI: NOTAZIONE E DEFINIZIONI

Introduciamo le seguenti abbreviazioni sintattiche, a,b $\in$ **N**:

- $[a, b] = \{x \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$ intervallo chiuso
- $[a, b) = \{x \mid a \leq x \wedge x < b\}$ intervallo semiaperto a destra
- $(a, b] = \{x \mid a < x \wedge x \leq b\}$ intervallo semiaperto a sinistra
- $(a, b) = \{x \mid a < x \wedge x < b\}$ intervallo aperto

Definizione di relazioni ausiliarie:

- $x \neq y \quad \equiv \quad \sim(x = y)$ (def-$\neq$)
- $x < y \quad \equiv \quad x \leq y \wedge x \neq y$ (def-$<$)
- $x > y \quad \equiv \quad x \geq y \wedge x \neq y$ (def-$>$)

ESERCIZIO

- Dimostriamo la seguente proprietà:

  $x \neq y \;\equiv\; \sim(x \leq y) \lor \sim(x \geq y)$
- Suggerimento: usare antisimm-$\leq$ e rifl-$\leq$

RELAZIONI TRA DISUGUAGLIANZE

- Leggi ($\sim$-$\leq$)
  - $\sim(x \leq y) \equiv x > y$
  - $\sim(x \geq y) \equiv x < y$

- Dimostriamo la prima, usando la proprietà:

  $x \neq y \;\equiv\; \sim(x \leq y) \lor \sim(x \geq y)$

- Esercizi:
  - $\sim(x < y) \equiv x > y \lor x = y$
  - $\sim(x > y) \equiv x < y \lor x = y$

$\mathbf{x > y}$

$\equiv$ {def->}

$x \geq y \land x \neq y$

$\equiv$ {lemma}

$(x \geq y) \land (\sim(x \leq y) \lor \sim(x \geq y))$

$\equiv$ {complemento}

$\mathbf{x \geq y \;\land\; \sim(x \leq y)}$

$\mathbf{\sim(x \leq y)}$

$\equiv$ {totalità, $P \land T = P$}

$\sim(x \leq y) \land (x \geq y \;\lor\; x \leq y)$

$\equiv$ {complemento}

$\mathbf{\sim(x \leq y) \land x \geq y}$

QUANTIFICAZIONE RISTRETTA A UN INSIEME: DOMINI

- Spesso la quantificazione (universale o esistenziale) è ristretta agli elementi che soddisfano una formula
- Si introducono le seguenti **abbreviazioni**:

  $(\forall x.P \Rightarrow Q)$ viene scritta come $(\forall x{:}P \,.\, Q)$

  e

  $(\exists x.P \wedge Q)$ viene scritta come $(\exists x{:}P \,.\, Q)$
- In queste formule, **P** è il *dominio* del quantificatore
- **Attenzione:** queste abbreviazioni vengono usate diffusamente nelle dispense, ma le eviteremo a lezione. Nei compiti d'esame potete usarle a vostro piacimento.
- Il dominio **P** è **vuoto** se $\mathbf{P[v/x]} \equiv \mathbf{F}$ per ogni elemento **v** del domino di interpretazione (o se $\sim(\exists x.P) \equiv \mathbf{T}$)

FORMULE VACUAMENTE VERE

- Una formula quantificata universalmente è *vacuamente vera* se il dominio è vuoto. Mostriamo infatti che se P è vuoto, allora $(\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv \mathbf{T}$ indipendentemente da Q.

$$\begin{aligned}
& \quad (\forall x.P \Rightarrow Q) \\
\equiv & \ \{ \textbf{Ip}\text{: P vuoto, cioè } P \equiv \mathbf{F} \} \\
& \quad (\forall x.\mathbf{F} \Rightarrow Q) \\
\equiv & \ \{ \mathbf{F} \Rightarrow Q \equiv \mathbf{T} \} \\
& \quad (\forall x.\mathbf{T})
\end{aligned}$$

- Due casi:
  1) Se il dominio di interpretazione non è vuoto allora per (costante) $(\forall x.\mathbf{T}) \equiv \mathbf{T}$.
  2) Se il dominio di interpretazione è vuoto, allora $(\forall x.\mathbf{T}) \equiv \mathbf{T}$ per la definizione di semantica

QUANTIFICAZIONE ESISTENZALE SU DOMINIO VUOTO

- Dualmente, la formula $(\exists x.\ P \wedge Q)$ è falsa se P è vuoto, indipendentemente da Q. Infatti:

$(\exists x.P \wedge Q)$

$\Rightarrow$ {legge $(\exists:\wedge)$ }

$(\exists x.P) \wedge (\exists x.Q)$

$\equiv$ {P è vuoto, cioè $P \equiv \mathbf{F}$}

$(\exists x.\mathbf{F}) \wedge (\exists x.Q)$

$\equiv$ {(costante) se dominio non vuoto, semantica altrimenti}

$\mathbf{F} \wedge (\exists x.Q)$

$\equiv$ {zero}

$\mathbf{F}$

ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI

- Molte delle leggi per i quantificatori valgono anche quando si quantifica su di un dominio esplicito. Vediamone due (le altre sono sulla dispensa):

- $(\forall:\wedge)$

$$(\forall x.R \Rightarrow P \wedge Q) \equiv (\forall x.R \Rightarrow P) \wedge (\forall x.R \Rightarrow Q)$$

- De Morgan

$$\sim(\exists x.R \wedge P) \equiv (\forall x.R \Rightarrow \sim P)$$

- Esercizio: si dimostrino queste leggi sfruttando le analoghe leggi senza dominio

NOTAZIONE PER GLI INTERVALLI

- Nelle dispense sono anche usate le seguenti abbreviazioni per un intervallo I, che noi eviteremo:

- $(\forall x \in I \,.\, Q) \cong (\forall x : x \in I \,.\, Q) \quad \cong \quad \mathbf{(\forall x.\ x \in I \Rightarrow Q)}$
- $(\exists x \in I \,.\, Q(x)) \cong (\exists x : x \in I \,.\, Q) \quad \cong \quad \mathbf{(\exists x.\ x \in I \wedge Q)}$

LEGGI PER QUANTIFICAZIONE SU DOMINI

- Sia **k** un elemento del dominio di interpretazione. Queste leggi mostrano come ridurre la quantificazione sul dominio **P** ad un dominio più piccolo ($P \wedge x \neq \mathbf{k}$):

$$(\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$

$$(\exists x.P \wedge Q) \equiv \begin{cases} (\exists x.P \wedge x \neq k \wedge Q) \vee Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\exists x.P \wedge x \neq k \wedge Q) & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$

Mostriamo la legge per $(\forall x.P \Rightarrow Q)$

$(\forall x.P \Rightarrow Q)$

$\equiv$ {Terzo escluso, Unità}

$(\forall x.P \wedge (x=k \vee x\neq k) \Rightarrow Q)$

$\equiv$ {Distributività}

$(\forall x.(P \wedge x=k) \vee (P \wedge x\neq k) \Rightarrow Q)$

$\equiv$ {Dominio}

$(\forall x.\ P \wedge x=k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.\ P \wedge x\neq k \Rightarrow Q)$

$\equiv$ {Leibniz}

$(\forall x.\ P[k/x] \wedge x=k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.\ P \wedge x\neq k \Rightarrow Q)$

$\equiv$ { **Ip**: P[k/x] , Unità}

$(\forall x.x=k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.\ P \wedge x\neq k \Rightarrow Q)$

$\equiv$ {Singoletto}

$Q[k/x] \wedge (\forall x.\ P \wedge x\neq k \Rightarrow Q)$

$\equiv$ { **Ip**: ~P[k/x], zero}

$(\forall x.\mathbf{F} \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.\ P \wedge x\neq k \Rightarrow Q)$

$\equiv$ {$\mathbf{F} \Rightarrow Q \equiv \mathbf{T}$, costante, unità}

$(\forall x.\ P \wedge x\neq k \Rightarrow Q)$

LEGGI PER QUANTIFICAZIONE SU INTERVALLI (1)

- Queste leggi sono come le precedenti, quando il dominio è un intervallo:

$$(\forall x. x\in[a,b) \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\forall x. x\in[a,b) \land x \neq k \Rightarrow Q) \land Q[k/x] & \text{se } k\in[a,b) \\ (\forall x. x\in[a,b) \land x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } k\notin[a,b) \end{cases}$$

$$(\exists x. x\in[a,b) \land Q) \equiv \begin{cases} (\exists x. x\in[a,b) \land x \neq k \land Q) \lor Q[k/x] & \text{se } k\in[a,b) \\ (\exists x. x\in[a,b) \land x \neq k \land Q) & \text{se } k\notin[a,b) \end{cases}$$

LEGGI PER QUANTIFICAZIONE SU INTERVALLI (2)

$(\forall x. x \in [a,b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x. x \in [a,b) \Rightarrow P) \wedge P[b/x]$

se [a,b] non è vuoto

$(\forall x. x \in [a,b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x. x \in (a,b] \Rightarrow P) \wedge P[a/x]$

se [a,b] non è vuoto

$(\exists x. x \in [a,b] \wedge P) \equiv (\exists x. x \in [a,b) \wedge P) \vee P[b/x]$

se [a,b] non è vuoto

$(\exists x. x \in [a,b] \wedge P) \equiv (\exists x. x \in (a,b] \wedge P) \vee P[a/x]$

se [a,b] non è vuoto

SPECIFICHE CON ARRAY/SEQUENZE

- Un array **a** di lunghezza **n** è rappresentato da una funzione dall'intervallo **[0, n) = {0, 1, …, n-1}** ad **N**

- Notazione: il valore i-esimo della funzione (array) **a** è indicato come **a[i]**

- Es: **a** ={<0,45>, <1,23>, <2,10>, <3,16>}

45	23	10	16
0	1	2	3

- NB: il primo elemento ha posizione/indice 0
  - a[0] = 45, …, a[2]=10, ...

ESERCIZI DI FORMALIZZAZIONE

Assumendo che **a** e **b** siano array di lunghezza **n**, fornire una formalizzazione dei seguenti enunciati, interpretata sul dominio dei naturali opportunamente arricchito.

- **a** è un array con tutti gli elementi uguali a 0

$$(\forall x.\ x \in [0,n) \Rightarrow a[x] = 0)$$

1. **a** rappresenta una funzione monotona crescente
2. **m** è il massimo dell'array **a**
3. **m** è l'indice del massimo dell'array **a**
4. l'array **a** ha un solo minimo locale
5. **a** ha tutti elementi distinti
6. **a** ha tutti elementi distinti e **b** è l'array **a** ordinato in senso crescente