



QUANTIFICATORI FUNZIONALI: MINIMO, MASSIMO, SOMMATORIA, CARDINALITA'

Corso di Logica per la Programmazione

ESTENSIONE DEL PRIMO ORDINE CON QUANTIFICATORI FUNZIONALI

- Abbiamo esteso il linguaggio del primo ordine con
 - notazione intensionale per insiemi
 - simboli di disuguaglianza
 - notazione per intervallie le relative leggi.
- Ora aggiungiamo alcuni “quantificatori funzionali” che saranno utili per la verifica di programmi con Triple di Hoare:
 - minimo/massimo di un insieme di valori
 - sommatoria di un insieme di valori
 - cardinalità di un insieme
 - sono quantificatori **funzionali** perché restituiscono un valore, non un booleano



QUANTIFICATORE “SOMMATORIA”

○ $(\sum \mathbf{x} : \mathbf{P}(\mathbf{x}) . \mathbf{E}(\mathbf{x}))$ denota

“la somma di tutti gli $\mathbf{E}(\mathbf{v})$ per tutti i valori \mathbf{v} per cui vale $\mathbf{P}(\mathbf{v})$ ”

○ $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ è una formula (dominio della sommatoria), $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ è un termine (un'espressione)

○ Esempi:

- $(\sum \mathbf{x} : \mathbf{x} > 0 \wedge \mathbf{x} \leq 3 . \mathbf{x}^2) = 1 + 4 + 9 = 14$

- $(\sum \mathbf{x} : \mathbf{x} \in [3, 5) . 2\mathbf{x} + 1) = ?? = 7 + 9 = 16$

- $(\sum \mathbf{x} : \mathbf{x} \in [0, 10) \wedge \text{pari}(\mathbf{x}) . \mathbf{x}) = ?? = 0+2+4+6+8 = 20$

- $(\sum \mathbf{x} : \mathbf{x} > 7 \wedge \mathbf{x} \in [0, 10) . 5) = ?? = 5 + 5 = 10$

- $(\sum \mathbf{x} : \mathbf{F} . 2\mathbf{x} + 5) = ?? = 0$



QUANTIFICATORE “CARDINALITÀ”

- $\#\{ \mathbf{x} : \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \}$ denota
“il numero dei valori \mathbf{v} per cui valgono $\mathbf{P}(\mathbf{v})$ e $\mathbf{Q}(\mathbf{v})$ ”
- $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ sono formule; $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ è il dominio.
 - “ \mid ” ha il significato di “ \wedge ”
- Esempi: $\#\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} \in [0, 10) \mid \text{pari}(\mathbf{x}) \} = 5$
 - $\#\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} \in [0, 10) \mid (\exists y. y \in \mathbf{N} \wedge y^2 = \mathbf{x}) \} = ?? = 4$
 - $\#\{ \mathbf{x} : \mathbf{T} \mid \mathbf{x}^2 \leq \mathbf{x} \} = ?? = 2$
 - $\#\{ \mathbf{x} : \mathbf{F} \mid \mathbf{x} \in [3, 5) \wedge \text{pari}(\mathbf{x}) \} = ?? = 0$
- Nota: $\#$ può essere definita mediante Σ :
$$\#\{ \mathbf{x} : \mathbf{P} \mid \mathbf{Q} \} = (\Sigma \mathbf{x} : \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} . 1) \quad (\text{Elim-}\#)$$



QUANTIFICATORI PER MINIMO E MASSIMO

- **a max b** = a se $a \geq b$, b altrimenti; **a min b** analogamente
- **(max x: P(x) . E(x))** denota
“il massimo dei valori **E(v)** per tutti i **v** per cui vale **P(v)**”
- **(min x: P(x) . E(x))** denota
“il minimo dei valori **E(v)** per tutti i **v** per cui vale **P(v)**”
- **P(x)** è una formula (dominio), **E(x)** è un'espressione
- Esempi: $(\max x: x \in [3, 10) \wedge \text{primo}(x) . x^2) = ?? = 49$

Array a

45	23	10	16	13
0	1	2	3	4

- $(\min i: i \in [0, 5) . \mathbf{a}[i]) = ?? = 10$
- $(\max i: i \in [0, 5) \wedge \text{primo}(\mathbf{a}[i]) . \mathbf{a}[i]) = ?? = 23$
- $(\max i: i \in [0, 5) \wedge \text{primo}(\mathbf{a}[i]) . i) = ?? = 4$



SINTASSI DEL PRIMO ORDINE CON QUANTIFICATORI FUNZIONALI

- Estendiamo le categorie sintattiche di termini, costanti ed espressioni con la sintassi vista:

Term ::= ... | $(\sum \text{Var} : \text{Fbf} . \text{Term})$ | $\#\{\text{Var} : \text{Fbf} \mid \text{Fbf}\}$ |
 $(\mathbf{max} \text{Var} : \text{Fbf} . \text{Term})$ | $(\mathbf{min} \text{Var} : \text{Fbf} . \text{Term})$ | Exp

Const ::= 0 | 1 | 2 | ... | $+\infty$ | $-\infty$

Exp ::= ... *ordinarie espressioni aritmetiche*

- x occorre **legata** in

$(\sum x:P . E)$, $\#\{x:P \mid Q\}$, $(\mathbf{max} x:P . E)$, $(\mathbf{min} x:P . E)$



FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI CON QUANTIFICATORI FUNZIONALI

Si assuma che le sequenze siano array con dominio $[0, n)$

- x è il Massimo Comun Divisore di y e z (usando il predicato $\text{Divide}(x,y) \equiv (\exists z . y = x * z)$)
- x è un numero **perfetto** (cioè è la somma dei suoi divisori eccetto se stesso)
- la sequenza **a** contiene più numeri pari che numeri dispari
- x è il numero di elementi della sequenza **a** che sono maggiori della somma degli elementi che lo precedono
- x è uguale alla somma dei quadrati degli elementi di **a** con indice pari



LEGGI PER I QUANTIFICATORI FUNZIONALI

- I quantificatori funzionali, introdotti come estensione della Logica dei Predicati, possono essere definiti nella logica estesa con i naturali.
- Nella dispensa [LP2] “Logica per la Programmazione: Applicazioni” sono riportate numerose leggi che descrivono loro proprietà.
- Molte di queste descrivono proprietà abbastanza ovvie: ne vediamo velocemente alcune.
- Altre sono molto importanti per la parte del corso su Triple di Hoare, e le vediamo in dettaglio.
- Come al solito, le leggi sono dimostrabili usando le definizioni e/o altre leggi.



LEGGI GENERALI (COME PER LE NORMALI QUANTIFICAZIONI)

○ Legge di ridenominazione

- ad esempio

$$(\sum x : P . E) \equiv (\sum y : P[y/x] . E[y/x])$$

se y non occorre né in P né in E

○ Legge di annidamento

- ad esempio

$$(\sum y:R . (\sum x:S . P)) = (\sum x:S . (\sum y: R . P))$$

se y non è libero in S e x non è libero in R



LEGGI SPECIFICHE

$$\circ (\min x: P . \neg E) = \neg (\max x: P . E) \quad (\mathbf{min:max})$$

Dominio equivalente (analogamente per gli altri quantificatori):

$$\circ (\forall x. P \equiv Q) \Rightarrow \#\{x: P \mid R\} = \#\{x: Q \mid R\} \quad (\#:\equiv)$$

Inclusione di dominio:

$$\circ (\forall x. P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\mathbf{min} x:P. E) \geq (\mathbf{min} x:Q. E) \quad (\mathbf{min}:\Rightarrow)$$

$$\circ (\forall x. P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\mathbf{max} x:P. E) \leq (\mathbf{max} x:Q. E) \quad (\mathbf{max}:\Rightarrow)$$

$$\circ (\forall x. P \Rightarrow Q) \Rightarrow \#\{x: P \mid R\} \leq \#\{x: Q \mid R\} \quad (\#:\Rightarrow)$$

$$\circ (\forall x. E \geq 0 \wedge P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\sum x:P.E) \leq (\sum x:Q.E) \quad (\Sigma:\Rightarrow)$$

$$\circ (\forall x. E \leq 0 \wedge P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\sum x:P.E) \geq (\sum x:Q.E)$$



LEGGI DI DISTRIBUTIVITA'

○ $(\sum_{x:P} . E + F) = (\sum_{x:P} . E) + (\sum_{x:P} . F) \quad (\Sigma:+)$

○ $(\mathbf{max} \ x:P. E \ \mathit{max} \ F) =$
 $(\mathbf{max} \ x:P. E) \ \mathit{max} \ (\mathbf{max} \ x:P. F)$

○ $(\mathbf{min} \ x:P. E \ \mathit{min} \ F) =$
 $(\mathbf{min} \ x:P. E) \ \mathit{min} \ (\mathbf{min} \ x:P. F)$



COSTANTE

- $(\sum_{x : P} . c) = c \times (\sum_{x : P} . 1)$ se x non è libera in c
- $(\mathbf{m} \ x : P . c) = c$ se x non è libera in c
e P non è vuoto
- $(\sum_{x : P} . c \times E) = c \times (\sum_{x : P} . E)$ se x non è libera in c
- $(\mathbf{m} \ x : P . c + E) = c + (\mathbf{m} \ x : P . E)$ se x non è libera in c
e P non è vuoto



LEGGI DI DOMINIO

- $(\sum_{x:P \vee Q}.E) = (\sum_{x:P}.E) + (\sum_{x:Q}.E) - (\sum_{x:P \wedge Q}.E)$
- $\#\{x:P \vee Q \mid R\} =$
 $\#\{x:P \mid R\} + \#\{x:Q \mid R\} - \#\{x:P \wedge Q \mid R\}$
- $(\mathbf{max} \ x:P \vee Q.E) = (\mathbf{max} \ x:P.E) \max (\mathbf{max} \ x:Q.E)$
- $(\mathbf{min} \ x:P \vee Q.E) = (\mathbf{min} \ x:P.E) \min (\mathbf{min} \ x:Q.E)$



SINGOLETTO E VUOTO

- $(\sum_{x: x = y} . E) = E [y/x]$

- $\#\{x: x = y \mid R\} = \begin{cases} 1 & \text{se } R[y/x] \\ 0 & \text{se } \sim R[y/x] \end{cases}$

- $(\sum_{x: P} . E) = 0$ se P è vuoto

- $\#\{x: P \mid Q\} = 0$ se P è vuoto

- $(\min x : P . E) = +\infty$ se P è vuoto

- $(\max x : P . E) = -\infty$ se P è vuoto



LEGGI DELL'INTERVALLO

$[a,b]$ un intervallo non vuoto di naturali

$$(\sum_{x:x \in [a,b] \wedge P.E}) = \begin{cases} (\sum_{x : x \in [a,b) \wedge P.E} + E[b/x] & \text{se } P[b/x] \\ (\sum_{x : x \in [a,b) \wedge P.E} & \text{se } \sim P[b/x] \end{cases}$$

$$\#\{x \in [a,b] \mid P\} = \begin{cases} (\# \{x : x \in [a,b) \wedge P\} + 1 & \text{se } P[b/x] \\ (\# \{x : x \in [a,b) \wedge P\} & \text{se } \sim P[b/x] \end{cases}$$

$$(\mathbf{m}_{x:x \in [a,b] \wedge P.E}) = \begin{cases} (\mathbf{m}_{x : x \in [a,b) \wedge P.E} \mathbf{m} E[b/x] & \text{se } P[b/x] \\ (\mathbf{m}_{x : x \in [a,b) \wedge P.E} & \text{se } \sim P[b/x] \end{cases}$$

Attenzione: queste leggi sono errate nella dispensa



USO DI LEGGE INTERVALLO, PROVA DI:

$$s = (\sum x: x \in [1, 3] \wedge \text{pari}(x) \cdot x^2) \equiv (s = 4)$$

$$s = (\sum x: x \in [1, 3] \wedge \text{pari}(x) \cdot x^2)$$

$$\equiv \{(\text{Intervallo-}\sum), \sim\text{pari}(3)\}$$

$$s = (\sum x: x \in [1, 2] \wedge \text{pari}(x) \cdot x^2)$$

$$\equiv \{(\text{Intervallo-}\sum), \text{pari}(2)\}$$

$$s = (\sum x: x \in [1, 1] \wedge \text{pari}(x) \cdot x^2) + 2^2$$

$$\equiv \{(\text{Intervallo-}\sum), \sim\text{pari}(1)\}$$

$$s = (\sum x: x \in \emptyset \wedge \text{pari}(x) \cdot x^2) + 2^2$$

$$\equiv \{(\sum\text{-vuoto})\}$$

$$s = 0 + 2^2$$

$$\equiv \{\text{calcolo}\}$$

$$s = 4$$



ESERCIZI

Utilizzando le leggi dei quantificatori funzionali, dimostrare le seguenti formule:

- $k = (\min x : x \in [a, b) \wedge P. x) \wedge k \in [a, b) \Rightarrow (\forall x \in [a, k). \sim P)$
con $[a, b)$ non vuoto
- $((\min x : x \in [0, N) \wedge P. x) \text{ min } N) \neq N \equiv (\exists x \in [0, N). P)$
con N numero naturale



FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI

Si assuma che le sequenze siano array con dominio $[0, n)$

- Nella sequenza **a** c'è un solo elemento uguale alla sua posizione
- Gli elementi di indice pari della sequenza **a** sono dispari
- Definire il predicato $\text{Palindroma}(\mathbf{a})$, che vale **T** se e solo la sequenza **a** è simmetrica rispetto al suo punto centrale

