LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2016-2017
Prima prova di verifica intermedia - 3/11/2016

Attenzione: si scrivano **nome**, **cognome**, **matricola** e **corso IN ALTO A DESTRA** su ogni foglio che si consegna.

ESERCIZIO 1
Si provi che le seguenti proposizioni sono tautologie, usando opportune dimostrazioni (non tabelle di verità).

1. $\neg(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg(R \vee S \vee \neg P) \quad \equiv \quad \neg P \vee \big((Q \;\Rightarrow\; \neg R) \wedge (Q \;\Rightarrow\; \neg S)\big)$
2. $(\neg(P \wedge \neg Q) \Rightarrow S) \wedge \neg P \wedge (R \Rightarrow \neg S) \;\;\Rightarrow\;\; \neg R$

ESERCIZIO 2
Si dica (motivando la risposta) se la seguente proposizione è una tautologia, se è una contraddizione o nessuna delle due:

$$(Q \vee R \Rightarrow P \wedge \neg S) \;\wedge\; (S \vee P \Rightarrow (\neg R \Rightarrow Q)) \;\;\Rightarrow\;\; \neg(S \vee R)$$

ESERCIZIO 3
Utilizzando il principio di sostituzione dell'implicazione, si applichi l'ipotesi non tautologica $\neg P \Rightarrow \neg Q \vee S$ alla seguente formula, completando un singolo passo di dimostrazione con la relativa giustificazione.

$$\neg(R \wedge \neg S) \Rightarrow (\neg P \wedge R \;\;\Rightarrow\;\; \neg Q)$$

ESERCIZIO 4
Si consideri l'alfabeto del primo ordine con $\mathcal{C} = \{L, P\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{\mathit{vicini}, \mathit{conosce}\}$, dove i simboli di predicato *vicini* e *conosce* sono binari. Si formalizzi il seguente enunciato:

"Tutti i vicini di Paolo si conoscono,
ma non ci sono due vicini di Luca che abbiano un conoscente in comune"

considerando l'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è l'insieme delle persone e α è definita come segue:

- $\alpha(L) =$ "la persona chiamata Luca",
- $\alpha(P) =$ "la persona chiamata Paolo",
- $\alpha(\mathit{vicini})(d, d') = \mathbf{T}$ se e solo se d è un vicino di d',
- $\alpha(\mathit{conosce})(d, d') = \mathbf{T}$ se e solo se d e d' si conoscono.

ESERCIZIO 5
Si calcoli, motivando la risposta, il valore di verità della formula

$$\Phi = (\forall x\,.\,(\neg Q(x) \Rightarrow \neg(\forall y\,.\,P(x, y))))$$

nell'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D} = \{1, 2, 3\}$ ed α è definita come segue

$$\alpha(Q)(z) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } z \in \{1, 2\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \alpha(P)(z, v) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } (z, v) \in \{(1, 1), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcoli cioè $\mathcal{I}_\rho(\Phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ è un assegnamento arbitrario.