

LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2016-2017

Primo Appello - 20/01/2017 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Si dica se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tabelle di verità; altrimenti va prodotto un controesempio mostrando esplicitamente che rende la formula falsa.

1. $(Q \vee \neg S \Rightarrow \neg(P \wedge \neg R)) \wedge ((P \vee R) \wedge \neg R) \Rightarrow S$
2. $\neg(A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee (D \wedge C) \Rightarrow \neg(A \wedge \neg B)) \Rightarrow C \wedge \neg A$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La formula è una tautologia come mostrato di seguito.

Per dimostrare la formula partiamo dalla premessa:

$$\begin{aligned} & (Q \vee \neg S \Rightarrow \neg(P \wedge \neg R)) \wedge ((P \vee R) \wedge \neg R) \\ \equiv & \quad \{(complemento)\} \\ & \underline{(Q \vee \neg S \Rightarrow \neg(P \wedge \neg R))} \wedge (P \wedge \neg R) \\ \equiv & \quad \{(contronominale), (doppia negazione)\} \\ & \underline{(P \wedge \neg R \Rightarrow \neg(Q \vee \neg S))} \wedge (P \wedge \neg R) \\ \Rightarrow & \quad \{(Modus Ponens), \text{occ. pos.}\} \\ & \underline{\neg(Q \vee \neg S)} \\ \equiv & \quad \{(De Morgan), (doppia negazione)\} \\ & \underline{\neg Q \wedge S} \\ \Rightarrow & \quad \{(semplif-\wedge), \text{occ. pos.}\} \\ & S \end{aligned}$$

2. La formula non è una tautologia, in quanto l'interpretazione: $\{A \mapsto \mathbf{T}, B \mapsto \mathbf{F}, C \mapsto \mathbf{T}, D \mapsto \mathbf{F}\}$ la rende falsa. La riga della tabella di verità corrispondente all'interpretazione data si costruisce in modo standard.

ESERCIZIO 2

Si consideri l'alfabeto del primo ordine \mathcal{A} con simboli di costante $\mathcal{C} = \{L, M\}$ e simboli di predicato $\mathcal{P} = \{persona(-), scrittore(-), libro(-), hascritto(-, -)\}$ e l'interpretazione $I = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove \mathcal{D} è l'insieme delle persone e dei libri, e

- $\alpha(L)$ è la persona Luca,
- $\alpha(M)$ è la persona Marco,
- $\alpha(persona)(p)$ è vera se e solo se p è una persona,
- $\alpha(scrittore)(p)$ è vera se e solo se p è uno scrittore,
- $\alpha(libro)(p)$ è vera se e solo se p è un libro,
- $\alpha(hascritto)(p, q)$ è vera se e solo se lo scrittore p ha scritto il libro q

Formalizzare i seguenti enunciati usando l'alfabeto \mathcal{A} rispetto all'interpretazione I :

1. "Ogni persona è uno scrittore solo se ha scritto almeno un libro"

2. “Marco e Luca non hanno scritto nessun libro insieme”

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

1.

$$(\forall x . (persona(x) \Rightarrow (scrittore(x) \Rightarrow (\exists y . libro(y) \wedge hascritto(x, y))))).$$

2.

$$\neg(\exists x . libro(x) \wedge hascritto(M, x) \wedge hascritto(L, x)).$$

ESERCIZIO 3

Si provi che la seguente formula è valida (A, B, C e D contengono la variabile libera x):

$$(\exists x . C \Rightarrow A) \wedge (\forall x . D \Rightarrow B) \wedge \neg(\exists x . A \vee (\neg B \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\forall x . C \wedge \neg D)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Cominciamo col semplificare la conseguenza:

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x . C \wedge \neg D) \\ \equiv & \{(De\ Morgan)\} \\ & (\exists x . \neg(C \wedge \neg D)) \\ \equiv & \{(De\ Morgan), (doppia\ negazione)\} \\ & (\exists x . \neg C \vee D) \end{aligned}$$

Quindi per la Regola di Skolemizzazione è sufficiente dimostrare la seguente formula, dove \mathbf{d} è una nuova costante:

$$(\exists x . C \Rightarrow A) \wedge (\forall x . D \Rightarrow B) \wedge \neg(\exists x . A \vee (\neg B \wedge \neg A)) \wedge (C \Rightarrow A)^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow (\exists x . \neg C \vee D)$$

Partiamo dalla premessa:

$$\begin{aligned} & (\exists x . C \Rightarrow A) \wedge (\forall x . D \Rightarrow B) \wedge \neg(\exists x . A \vee (\neg B \wedge \neg A)) \wedge (C^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow A^{[\mathbf{d}/x]}) \\ \Rightarrow & \{(semplif-\wedge),\ occ.\ pos.\} \\ & (\forall x . D \Rightarrow B) \wedge \neg(\exists x . A \vee (\neg B \wedge \neg A)) \wedge (C^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow A^{[\mathbf{d}/x]}) \\ \Rightarrow & \{(elim-\forall),\ occ.\ pos.\} \\ & (D^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow B^{[\mathbf{d}/x]}) \wedge \neg(\exists x . A \vee (\neg B \wedge \neg A)) \wedge (C^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow A^{[\mathbf{d}/x]}) \\ \equiv & \{(complemento)\} \\ & (D^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow B^{[\mathbf{d}/x]}) \wedge \neg(\exists x . A \vee \neg B) \wedge (C^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow A^{[\mathbf{d}/x]}) \\ \equiv & \{(De\ Morgan)\} \\ & (D^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow B^{[\mathbf{d}/x]}) \wedge (\forall x . \neg(A \vee \neg B)) \wedge (C^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow A^{[\mathbf{d}/x]}) \\ \Rightarrow & \{(elim-\forall),\ occ.\ pos.\} \\ & (D^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow B^{[\mathbf{d}/x]}) \wedge \neg(A^{[\mathbf{d}/x]} \vee \neg B^{[\mathbf{d}/x]}) \wedge (C^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow A^{[\mathbf{d}/x]}) \\ \equiv & \{(De\ Morgan), (doppia\ negazione)\} \\ & (D^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow B^{[\mathbf{d}/x]}) \wedge (\neg A^{[\mathbf{d}/x]} \wedge B^{[\mathbf{d}/x]}) \wedge (C^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow A^{[\mathbf{d}/x]}) \\ \equiv & \{(contronominale)\} \\ & (D^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow B^{[\mathbf{d}/x]}) \wedge (\neg A^{[\mathbf{d}/x]} \wedge B^{[\mathbf{d}/x]}) \wedge (\neg A^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow \neg C^{[\mathbf{d}/x]}) \\ \Rightarrow & \{(Modus\ Ponens),\ occ.\ pos.\} \\ & (D^{[\mathbf{d}/x]} \Rightarrow B^{[\mathbf{d}/x]}) \wedge B^{[\mathbf{d}/x]} \wedge \neg C^{[\mathbf{d}/x]} \\ \Rightarrow & \{(semplif.\wedge),\ occ.\ pos.\} \\ & \neg C^{[\mathbf{d}/x]} \\ \Rightarrow & \{(intro-\vee),\ occ.\ pos.\} \\ & \neg C^{[\mathbf{d}/x]} \vee D^{[\mathbf{d}/x]} \end{aligned}$$

\Rightarrow $\{(\text{intro-}\exists), \text{occ. pos}\}$
 $(\exists x. \neg C \vee D)$

ESERCIZIO 4

Si formalizzi il seguente enunciato (assumendo **a, b: array [0, n] of int**):

“Ogni elemento dell’array **b** è uguale alla somma degli elementi di **a** che lo precedono strettamente oppure è uguale al massimo tra gli elementi pari di **a** che lo seguono.”

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

$$(\forall x. x \in [0, n) \Rightarrow (b[x] = (\sum y : y \in [0, x). a[y])) \vee (b[x] = (\max z : z \in [x, n) \wedge \text{pari}(a[z]). a[z])))$$

ESERCIZIO 5

Si consideri il seguente programma annotato (assumendo **a, c: array [0, n] of int**):

```

{ n > 0 }
y:=n-1; h:=0;
{Inv : y ∈ [-1, n) ∧ h = #{i : i ∈ (y, n) | a[i] > c[i]}}{t: y}
while (y >= 0) do
  if (a[y] > c[y])
    then h:=h+1
    else skip fi;
  y:=y-1
endw
{h = #{i : i ∈ [0, n) | a[i] > c[i]}}

```

Scrivere e dimostrare l’ipotesi di invarianza.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Invariante $Inv : y \in [-1, n) \wedge h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\}$
 Funzione di terminazione $t : y$
 Condizione $E : y \geq 0$
 Comando $C : \text{if} \dots \text{fi}; y:=y-1$

L’ *Ipotesi di Invarianza* ($\{Inv \wedge E\} C \{Inv \wedge \text{def}(E)\}$) in questo caso è

```

{y ∈ [-1, n) ∧ h = #{i : i ∈ (y, n) | a[i] > c[i]} ∧ (y >= 0)}
  if (a[y] > c[y]) then h:=h+1 else skip fi; y:=y-1
{y ∈ [-1, n) ∧ h = #{i : i ∈ (y, n) | a[i] > c[i]} ∧ def(y >= 0)}

```

Per verificare la tripla applichiamo la Regola della Sequenza e quindi dobbiamo trovare una asserzione R che soddisfi le seguenti triple:

$$(5.1) \{y \in [-1, n) \wedge h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge (y \geq 0)\} \text{ if } (a[y] > c[y]) \text{ then } h:=h+1 \text{ else skip fi } \{R\}$$

$$(5.2) \{R\} y:=y-1 \{y \in [-1, n) \wedge h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge \text{def}(y \geq 0)\}$$

Per determinare R usiamo l’Assioma dell’Assegnamento in (5.2) e troviamo

$$\begin{aligned}
 & \text{def}(y-1) \wedge (y \in [-1, n) \wedge h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge \text{def}(y \geq 0))^{[y-1/y]} \\
 \equiv & \{ \text{sostituzione, definizione di } \text{def} \} \\
 & y-1 \in [-1, n) \wedge h = \#\{i : i \in (y-1, n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge \text{def}(y-1 \geq 0)
 \end{aligned}$$

Resta quindi da verificare la tripla (5.1) usando l’asserzione R appena calcolata. Per dimostrare la tripla (5.1), applichiamo la Regola del Condizionale riducendoci a dimostrare che:

$$(5.1.1) \quad y \in [-1, n) \wedge h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge (y \geq 0) \Rightarrow \text{def}(a[y] > c[y])$$

$$(5.1.2) \quad \{y \in [-1, n) \wedge h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge (y \geq 0) \wedge a[y] > c[y]\} \mathbf{h} := \mathbf{h} + 1 \{R\}$$

$$(5.1.3) \quad \{y \in [-1, n) \wedge h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge (y \geq 0) \wedge \neg(a[y] > c[y])\} \mathbf{skip} \{R\}$$

(5.1.1) Per dimostrare l'implicazione partiamo dalla conseguenza

$$\begin{aligned} & \text{def}(a[y] > c[y]) \\ \equiv & \quad \{\text{definizione di def}\} \\ & y \in \text{dom}(a) \wedge y \in \text{dom}(c) \\ \equiv & \quad \{\mathbf{Ip}: y \in [-1, n) \wedge \text{dom}(a) = \text{dom}(c) = [0, n) \wedge y \geq 0\} \end{aligned}$$

T

(5.1.2) Per verificare la tripla applichiamo la Regola dell'Assegnamento e ci riduciamo a dimostrare che

$$y \in [-1, n) \wedge h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge (y \geq 0) \wedge a[y] > c[y] \Rightarrow \text{def}(h + 1) \wedge R^{[h+1/h]}$$

Partiamo dalla conseguenza

$$\begin{aligned} & \text{def}(h + 1) \wedge R^{[h+1/h]} \\ \equiv & \quad \{\text{definizione di def e sostituzione}\} \\ & \underline{y - 1 \in [-1, n)} \wedge h + 1 = \#\{i : i \in (y - 1, n) \mid a[i] > c[i]\} \\ \equiv & \quad \{\mathbf{Ip}: y \in [-1, n), y \geq 0\} \\ & h + 1 = \underline{\#\{i : i \in (y - 1, n) \mid a[i] > c[i]\}} \\ \equiv & \quad \{(\text{Intervallo-}\#), \mathbf{Ip}: a[y] > c[y]\} \\ & h + 1 = \underline{\#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\} + 1} \\ \equiv & \quad \{\mathbf{Ip}: h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\}\} \\ & h + 1 = h + 1 \\ \equiv & \quad \{\text{calcolo}\} \end{aligned}$$

T

(5.1.3) Per verificare la tripla applichiamo l'assioma (SKIP) e la regola (PRE) e ci riduciamo a dimostrare che

$$y \in [-1, n) \wedge h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge (y \geq 0) \wedge \neg(a[y] > c[y]) \Rightarrow R$$

La dimostrazione procede in modo analogo al caso (5.1.2) usando la legge (Intervallo-#). In questo caso tuttavia abbiamo che $\neg(a[y] > c[y])$.

ESERCIZIO 6

Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **c,d: array [0, n) of int**):

$$\begin{aligned} & \{k \in (0, n) \wedge (\forall i. i \in [0, k) \Rightarrow c[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. d[y]) - (\Sigma x : x \in [0, i]. x))\} \\ & \quad \mathbf{c[k]} := \mathbf{c[k-1]} + \mathbf{d[k]} - \mathbf{k} \\ & \{(\forall i. i \in [0, k) \Rightarrow c[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. d[y]) - (\Sigma x : x \in [0, i]. x))\} \end{aligned}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Applicando l'Assioma dell'Aggiornamento Selettivo e la regola (PRE) ci riduciamo a verificare che:

$$k \in (0, n) \wedge (\forall i. i \in [0, k] \Rightarrow c[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. d[y]) - (\Sigma x : x \in [0, i]. x)) \Rightarrow \\ \text{def}(k) \wedge k \in \text{dom}(c) \wedge \text{def}(c[k-1] + d[k] - k) \wedge Q^{[a/c]}$$

dove $a = c^{[c[k-1]+d[k]-k/k]}$ e

$$Q = (\forall i. i \in [0, k] \Rightarrow c[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. d[y]) - (\Sigma x : x \in [0, i]. x)).$$

Partiamo dalla conseguenza

$$\begin{aligned} & \text{def}(k) \wedge k \in \text{dom}(c) \wedge \text{def}(c[k-1] + d[k] - k) \wedge Q^{[a/c]} \\ \equiv & \{ \text{definizione di } \text{def} \} \\ & k \in \text{dom}(c) \wedge k-1 \in \text{dom}(c) \wedge k \in \text{dom}(d) \wedge Q^{[a/c]} \\ \equiv & \{ \mathbf{Ip}: \text{dom}(c) = \text{dom}(d) = [0, n], k \in (0, n) \} \\ & Q^{[a/c]} \\ \equiv & \{ \text{sostituzione} \} \\ & (\forall i. i \in [0, k] \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. d[y]) - (\Sigma x : x \in [0, i]. x)) \\ \equiv & \{ (\text{Intervallo-}\forall) \} \\ & (\forall i. i \in [0, k] \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. d[y]) - (\Sigma x : x \in [0, i]. x)) \wedge a[k] = (\Sigma y : y \in [0, k]. d[y]) - (\Sigma x : x \in [0, k]. x) \\ \equiv & \{ \mathbf{Ip}: (\forall i. i \in [0, k] \Rightarrow c[i] = (\Sigma y : y \in [0, i]. d[y]) - (\Sigma x : x \in [0, i]. x)), \text{definizione di } a \} \\ & a[k] = (\Sigma y : y \in [0, k]. d[y]) - (\Sigma x : x \in [0, k]. x) \\ \equiv & \{ \text{definizione di } a = c^{[c[k-1]+d[k]-k/k]} \} \\ & c[k-1] + d[k] - k = (\Sigma y : y \in [0, k]. d[y]) - (\Sigma x : x \in [0, k]. x) \\ \equiv & \{ (\text{Intervallo-}\Sigma) \} \\ & c[k-1] + d[k] - k = (\Sigma y : y \in [0, k-1]. d[y]) + d[k] - ((\Sigma x : x \in [0, k-1]. x) + k) \\ \equiv & \{ \text{calcolo} \} \\ & c[k-1] = (\Sigma y : y \in [0, k-1]. d[y]) - (\Sigma x : x \in [0, k-1]. x) \\ \equiv & \{ \mathbf{Ip}: c[k-1] = (\Sigma y : y \in [0, k-1]. d[y]) - (\Sigma x : x \in [0, k-1]. x) \} \\ & \mathbf{T} \end{aligned}$$