LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2016-2017
Secondo Appello - 10/02/2017 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Si dica se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tabelle di verità; altrimenti va prodotto un controesempio mostrando esplicitamente che rende la formula falsa.

1. $(P \Rightarrow (Q \land \neg R \Rightarrow \neg P)) \ \land \ (\neg R \lor \neg S) \ \Rightarrow \ (P \Rightarrow \neg Q)$
2. $\neg(R \land S) \ \land \ (Q \Rightarrow S \land Q) \ \land \ (P \lor \neg S \Rightarrow R) \ \Rightarrow \ (P \Rightarrow \neg Q)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La formula non è una tautologia, in quanto l'interpretazione: $\{P \mapsto \mathbf{T}, Q \mapsto \mathbf{T}, R \mapsto \mathbf{T}, S \mapsto \mathbf{F}\}$ la rende falsa. La riga della tabella di verità corrispondente all'interpretazione data si costruice in modo standard.

2. La formula è una tautologia come mostrato di seguito.

   Per dimostrare la formula partiamo dalla premessa:

$$\begin{array}{ll}
 & \underline{\neg(R \land S)} \ \land \ (Q \Rightarrow S \land Q) \ \land \ (P \lor \neg S \Rightarrow R) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\neg R \lor \neg S) \ \land \ (\underline{Q \Rightarrow S \land Q}) \ \land \ (P \lor \neg S \Rightarrow R) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-} \Rightarrow)\} \\
 & (\neg R \lor \neg S) \ \land \ (\underline{\neg Q \lor (S \land Q)}) \ \land \ (P \lor \neg S \Rightarrow R) \\
\equiv & \quad \{(\text{complemento})\} \\
 & \underline{(\neg R \lor \neg S) \ \land \ (\neg Q \lor S)} \ \land \ (P \lor \neg S \Rightarrow R) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{risoluzione}), \text{occ. pos.}\} \\
 & (\neg R \lor \neg Q) \ \land \ (\underline{P \lor \neg S \Rightarrow R}) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-} \Rightarrow), (\text{De Morgan})\} \\
 & \underline{(\neg R \lor \neg Q) \ \land \ ((\neg P \land S) \lor R)} \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{risoluzione}), \text{occ. pos.}\} \\
 & \neg Q \lor (\underline{\neg P \land S}) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{sempl-}\land), \text{occ. pos.}\} \\
 & \underline{\neg Q \lor \neg P} \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-} \Rightarrow)\} \\
 & P \ \Rightarrow \ \neg Q
\end{array}$$

ESERCIZIO 2

Si formalizzi il seguente enunciato usando l'alfabeto con simboli di predicato $\mathcal{P} = \{citta(\_), regione(\_), capoluogo(\_,\_)\}$, rispetto all'interpretazione fissata $(\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è l'insieme delle città e delle regioni, e

- $\alpha(citta)(d)$ è vera se e solo se d è una città,
- $\alpha(regione)(d)$ è vera se e solo se d è una regione,

- $\alpha(capoluogo)(b, d)$ è vera se e solo se b è il capoluogo di d.

"Ogni regione ha una città che è capoluogo ma non esistono due città che sono capoluogo della stessa regione."

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

$$\begin{array}{l}(\forall x \,.\, regione(x) \;\Rightarrow\; (\exists y \,.\, citta(y) \land capoluogo(y, x))) \land \\ \quad \neg(\exists x \,.\, \exists y \,.\, citta(x) \land citta(y) \land \neg(x = y) \land (\exists z \,.\, regione(z) \land capoluogo(x, z) \land capoluogo(y, z)))\end{array}$$

oppure

$$(\forall x \,.\, regione(x) \;\Rightarrow\; (\exists y \,.\, citta(y) \land capoluogo(y, x)) \;\land\; \neg(\exists z \,.\, citta(z) \land \neg(z = y) \land capoluogo(z, x))).$$

ESERCIZIO 3
Si provi che la seguente formula è valida (P, Q, R e S contengono la variabile libera x):

$$\neg(\exists x \,.\, (P \lor \neg Q) \land Q) \;\land\; (\forall x \,.\, R \Rightarrow P) \;\land\; (\exists x \,.\, S \Rightarrow Q) \;\Rightarrow\; (\exists x \,.\, \neg S \lor \neg R)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3
Per la Regola di Skolemizzazione è sufficiente dimostrare la seguente formula, dove $\mathbf{d}$ è una nuova costante:

$$\neg(\exists x \,.\, (P \lor \neg Q) \land Q) \;\land\; (\forall x \,.\, R \Rightarrow P) \;\land\; (\exists x \,.\, S \Rightarrow Q) \land (S[^{\mathbf{d}}/_{x}]] \Rightarrow Q[^{\mathbf{d}}/_{x}]) \;\Rightarrow\; (\exists x \,.\, \neg S \lor \neg R)$$

Partiamo dalla premessa:

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x \,.\, (P \lor \neg Q) \land Q) \;\land\; (\forall x \,.\, R \Rightarrow P) \;\land\; (\exists x \,.\, S \Rightarrow Q) \land (S[^{\mathbf{d}}/_{x}] \Rightarrow Q[^{\mathbf{d}}/_{x}]) \\
\Rightarrow & \{(\text{semplif-}\land),\ \text{occ. pos.}\} \\
 & \underline{\neg(\exists x \,.\, (P \lor \neg Q) \land Q)} \;\land\; (\forall x \,.\, R \Rightarrow P) \;\land\; (S[^{\mathbf{d}}/_{x}] \Rightarrow Q[^{\mathbf{d}}/_{x}]) \\
\equiv & \{(\text{De Morgan}),(\text{doppia negazione})\} \\
 & (\forall x \,.\, \underline{(\neg P \land Q) \lor \neg Q}) \;\land\; (\forall x \,.\, R \Rightarrow P) \;\land\; (S[^{\mathbf{d}}/_{x}] \Rightarrow Q[^{\mathbf{d}}/_{x}]) \\
\equiv & \{(\text{complemento})\} \\
 & \underline{(\forall x \,.\, \neg P \lor \neg Q)} \;\land\; \underline{(\forall x \,.\, R \Rightarrow P)} \;\land\; (S[^{\mathbf{d}}/_{x}] \Rightarrow Q[^{\mathbf{d}}/_{x}]) \\
\Rightarrow & \{(\text{elim-}\forall),\ \text{occ. pos.}\} \\
 & (\underline{\neg P[^{\mathbf{d}}/_{x}] \lor \neg Q[^{\mathbf{d}}/_{x}]}) \;\land\; (R[^{\mathbf{d}}/_{x}] \Rightarrow P[^{\mathbf{d}}/_{x}]) \;\land\; (S[^{\mathbf{d}}/_{x}] \Rightarrow Q[^{\mathbf{d}}/_{x}]) \\
\equiv & \{(\text{elim-} \Rightarrow)\} \\
 & \underline{(P[^{\mathbf{d}}/_{x}] \;\Rightarrow\; \neg Q[^{\mathbf{d}}/_{x}]) \;\land\; (R[^{\mathbf{d}}/_{x}] \Rightarrow P[^{\mathbf{d}}/_{x}])} \;\land\; (S[^{\mathbf{d}}/_{x}] \Rightarrow Q[^{\mathbf{d}}/_{x}]) \\
\Rightarrow & \{(\text{trans-} \Rightarrow),\ \text{occ. pos.}\} \\
 & (R[^{\mathbf{d}}/_{x}] \Rightarrow \neg Q[^{\mathbf{d}}/_{x}]) \;\land\; (\underline{S[^{\mathbf{d}}/_{x}] \Rightarrow Q[^{\mathbf{d}}/_{x}]}) \\
\equiv & \{(\text{contronominale})\} \\
 & \underline{(R[^{\mathbf{d}}/_{x}] \Rightarrow \neg Q[^{\mathbf{d}}/_{x}]) \;\land\; (\neg Q[^{\mathbf{d}}/_{x}] \;\Rightarrow\; \neg S[^{\mathbf{d}}/_{x}])} \\
\Rightarrow & \{(\text{trans-} \Rightarrow),\ \text{occ. pos.}\} \\
 & (\underline{R[^{\mathbf{d}}/_{x}] \Rightarrow \neg S[^{\mathbf{d}}/_{x}]}) \\
\equiv & \{(\text{elim-} \Rightarrow)\} \\
 & (\neg R[^{\mathbf{d}}/_{x}] \lor \neg S[^{\mathbf{d}}/_{x}]) \\
\Rightarrow & \{(\text{intro-}\exists),\ \text{occ. pos}\} \\
 & (\exists x \,.\, \neg R \lor \neg S)
\end{array}$$

ESERCIZIO 4
Si formalizzi il seguente enunciato (assumendo **a, b: array [0, n) of int**):

"Ogni elemento dell'array **a** di posizione pari è il triplo di un elemento dell'array **b**, mentre tutti gli altri sono minori di tutti gli elementi di **b**."

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

$$\big(\forall x \,.\, x \in [0,n) \;\Rightarrow\; (pari(x) \;\Rightarrow\; (\exists y \,.\, y \in [0,n) \wedge a[x] = 3 * b[y])) \wedge (dispari(x) \;\Rightarrow\; (\forall y \,.\, y \in [0,n) \;\Rightarrow\; a[x] < b[y]))\big)$$

ESERCIZIO 5

Si consideri il seguente programma annotato (assumendo **a: array [0, n) of int**):

$\{\ n > 0\ \}$

`z := 0; m := 0`

$\{\mathsf{Inv} :\ z \in [0,n] \;\wedge\; m = \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,y\big)\}\{\text{t: } n - z\}$

```
while (z < n) do
    z, m := z+1, m+a[z]+2*z
endw
```

$\{m = \big(\Sigma y : y \in [0,n)\,.\,a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,n)\,.\,y\big)\}$

Scrivere e dimostrare l'ipotesi di invarianza.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Invariante $Inv : z \in [0,n] \;\wedge\; m = \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,y\big)$
Funzione di terminazione $t : n - z$
Condizione $E : (z < n)$
Comando C : `z, m := z+1, m+a[z]+2*z`

L' *Ipotesi di Invarianza* ($\{Inv \wedge E\}\ C\ \{Inv \wedge def(E)\}$) in questo caso è

$\{z \in [0,n] \;\wedge\; m = \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,y\big) \wedge (z < n)\}$
`z, m := z+1, m+a[z]+2*z`
$\{z \in [0,n] \;\wedge\; m = \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,y\big) \wedge def(z < n)\}$

Per verificare la tripla usiamo la Regola dell'Assegnamento e ci riduciamo a dimostrare che

$$\begin{aligned} &z \in [0,n] \;\wedge\; m = \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,y\big) \wedge (z < n) \;\Rightarrow \\ &\quad def(z+1) \wedge def(m + a[z] + 2 * z) \wedge R[^{z+1, m+a[z]+2*z}/_{z,m}] \end{aligned}$$

dove

$$R = z \in [0,n] \;\wedge\; m = \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,y\big) \wedge def(z < n)$$

Per dimostrare l'implicazione partiamo dalla conseguenza

$$\begin{aligned}
& def(z+1) \wedge def(m + a[z] + 2 * z) \wedge R[^{z+1, m+a[z]+2*z}/_{z,m}] \\
\equiv\ & \{\text{definizione di } def \text{ e sostituzione}\} \\
& \underline{z \in dom(a) \wedge z+1 \in [0,n]} \;\wedge\; m + a[z] + 2 * z = \big(\Sigma y : y \in [0,z+1)\,.\,a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z+1)\,.\,y\big) \\
\equiv\ & \{\textbf{Ip}\text{: } z \in [0,n], (z < n), dom(a) = [0,n)\ \} \\
& m + a[z] + 2 * z = \underline{\big(\Sigma y : y \in [0,z+1)\,.\,a[y]\big)} + 2 * \underline{\big(\Sigma y : y \in [0,z+1)\,.\,y\big)} \\
\equiv\ & \{(\text{Intervallo-}\Sigma)\} \\
& m + a[z] + 2 * z = \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,a[y]\big) + a[z] + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,y\big) + 2 * z \\
\equiv\ & \{\text{calcolo}\} \\
& m = \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,y\big) \\
\equiv\ & \big\{\textbf{Ip}\text{: } m = \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z)\,.\,y\big)\ \big\} \\
& \mathbf{T}
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 6

Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **b: array [0, m) of int**):

$\{x \in [1, m) \ \wedge \ \big(\forall i \,.\, i \in [1, x) \Rightarrow b[i] \geq 2 * b[i-1]\big)\}$

```
if (b[x] >= 2*b[x-1])
  then skip
  else b[x] := 2*b[x-1]+1
fi
```

$\{\big(\forall i \,.\, i \in [1, x] \Rightarrow b[i] \geq 2 * b[i-1]\big)\}$

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Siano

$$P = x \in [1, m) \ \wedge \ \big(\forall i \,.\, i \in [1, x) \Rightarrow b[i] \geq 2 * b[i-1]\big)$$

$$R = \big(\forall i \,.\, i \in [1, x] \Rightarrow b[i] \geq 2 * b[i-1]\big)$$

Per dimostrare la tripla applichiamo la Regola del Condizionale riducendoci a dimostrare che:

(5.1.1) $P \Rightarrow def(b[x] \geq 2 \, * \, b[x-1])$

(5.1.2) $\{P \wedge (b[x] \geq 2 \, * \, b[x-1])\}$ `skip` $\{R\}$

(5.1.3) $\{P \wedge \neg(b[x] \geq 2 \, * \, b[x-1])\} \ b[x] := 2 * b[x-1] + 1 \ \{R\}$

(5.1.1) Per dimostrare l'implicazione partiamo dalla conseguenza

$$\begin{array}{ll} & def(b[x] \geq 2 \, * \, b[x-1]) \\ \equiv & \quad \{\text{definizione di } def\} \\ & x \in dom(b) \wedge x - 1 \in dom(b) \\ \equiv & \quad \{\mathbf{Ip}\text{: } x \in [1, m) \ \wedge \ dom(b) = [0, m)\} \\ & \mathbf{T} \end{array}$$

(5.1.2) Per verificare la tripla applichiamo l'assioma (SKIP) e la regola (PRE) e ci riduciamo a dimostrare che

$$x \in [1, m) \ \wedge \ \big(\forall i \,.\, i \in [1, x) \Rightarrow b[i] \geq 2 * b[i-1]\big) \wedge (b[x] \geq 2 \, * \, b[x-1]) \ \Rightarrow \ R$$

Partiamo dalla conseguenza

$$\begin{array}{ll} & \big(\forall i \,.\, i \in [1, x] \Rightarrow b[i] \geq 2 * b[i-1]\big) \\ \equiv & \quad \{(\text{Intervallo-}\forall)\} \\ & \big(\forall i \,.\, i \in [1, x) \Rightarrow b[i] \geq 2 * b[i-1]\big) \wedge b[x] \geq 2 * b[x-1] \\ \equiv & \quad \big\{\mathbf{Ip}\text{: } \big(\forall i \,.\, i \in [1, x) \Rightarrow b[i] \geq 2 * b[i-1]\big) \ \big\} \\ & b[x] \geq 2 * b[x-1] \\ \equiv & \quad \{\mathbf{Ip}\text{: } b[x] \geq 2 * b[x-1] \ \} \\ & \mathbf{T} \end{array}$$

(5.1.3) Per verificare la tripla applichiamo l'Assioma dell'Aggiornamento Selettivo e la regola (PRE) e ci riduciamo a verificare che:

$$x \in [1, m) \wedge \big(\forall i \,.\, i \in [1, x) \Rightarrow b[i] \geq 2{*}b[i{-}1]\big) {\wedge} \neg(b[x] \geq 2 * b[x{-}1]) \ \Rightarrow \ def(x) {\wedge} def(2{*}b[x{-}1]{+}1) {\wedge} x \in dom(b) {\wedge} R[^{a}/_{b}]$$

dove $a = b[^{2*b[x-1]+1}/_{x}]$.

Partiamo dalla conseguenza

$def(x) \wedge def(2 * b[x-1]+1) \wedge x \in dom(b) \wedge R[^a/_b]$

$\equiv$ $\{$definizione di $def\}$

$x-1 \in dom(b) \wedge x \in dom(b) \wedge R[^a/_b]$

$\equiv$ $\{$**Ip**: $x \in [1,m) \ \wedge \ dom(b) = [0,m)\}$

$R[^a/_b]$

$\equiv$ $\{$sostituzione$\}$

$\big(\forall i \,.\, i \in [1,x] \Rightarrow a[i] \geq 2 * a[i-1]\big)$

$\equiv$ $\{$(Intervallo-$\forall$)$\}$

$\big(\forall i \,.\, i \in [1,x) \Rightarrow a[i] \geq 2 * a[i-1]\big) \wedge a[x] \geq 2 * a[x-1]$

$\equiv$ $\big\{$**Ip**: $\big(\forall i \,.\, i \in [1,x) \Rightarrow b[i] \geq 2 * b[i-1]\big)$, definizione di $a = b[^{2*b[x-1]+1}/_x]$ $\big\}$

$a[x] \geq 2 * a[x-1]$

$\equiv$ $\big\{$definizione di $a = b[^{2*b[x-1]+1}/_x]\big\}$

$2 * b[x-1]+1 \geq 2 * b[x-1]$

$\equiv$ $\{$calcolo$\}$

T