Logica per la Programmazione

Lezione 3

- Dimostrazione di Tautologie e Sintassi del Calcolo Proposizionale
  - Antonio, Corrado e Bruno... formalmente
  - Tautologie: dimostrazioni e controesempi
  - Sintassi del Calcolo Proposizionale
  - Ambiguità, precedenza tra connettivi e parentesi

Dimostrazioni di Tautologie: torniamo all'esempio del Test

- **Premesse**:
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio; ($C \Rightarrow A$)
  - Condizione necessaria percé Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno. ($A \Rightarrow B$)
- **Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che**:
  - Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno. ($C \Rightarrow B$)
  - Nessuno dei tre amici è andato al cinema. ($\neg A \ \wedge \ \neg B \ \wedge \ \neg C$)
  - Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado ($B \Rightarrow C$)
  - Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno. ($\neg C \Rightarrow \neg B$)

Come possiamo essere certi della risposta?

- Bisogna determinare quale delle ultime 4 formule è *conseguenza logica* delle premesse, cioè quale delle seguenti formule è una tautologia:
  1. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$
  2. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg A \ \wedge \ \neg B \ \wedge \ \neg C)$
  3. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
  4. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg B)$
- Si possono verificare con tabelle di verità o dimostrazioni, usando le leggi viste.
- Mostriamo che (1) è una tautologia, e che (2), (3) e (4) non sono tautologie

La (1) è una Tautologia (Transitività dell'implicazione)

	$((C \Rightarrow A) \land (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$	
$\equiv$		$\{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\}$
	$\neg((C \Rightarrow A) \land (A \Rightarrow B)) \lor (C \Rightarrow B)$	
$\equiv$		$\{(\text{Elim.-}\Rightarrow)$, 3 volte$\}$
	$\neg((\neg C \lor A) \land (\neg A \lor B)) \lor (\neg C \lor B)$	
$\equiv$		$\{$(De Morgan)$\}$
	$\neg(\neg C \lor A) \lor \neg(\neg A \lor B) \lor (\neg C \lor B)$	
$\equiv$		$\{$(De Morgan) 2 volte, (Doppia Neg.)$\}$
	$(C \land \neg A) \lor (A \land \neg B) \lor (\neg C \lor B)$	
$\equiv$		$\{$(Comm.), (Assoc.)$\}$
	$((C \land \neg A) \lor \neg C) \lor ((A \land \neg B) \lor B)$	
$\equiv$		$\{$(Distr.)$\}$
	$((C \lor \neg C) \land (\neg A \lor \neg C)) \lor ((A \lor B) \land (\neg B \lor B))$	
$\equiv$		$\{$(Terzo Escluso)$\}$
	$(\mathbf{T} \land (\neg A \lor \neg C)) \lor ((A \lor B) \land \mathbf{T})$	
$\equiv$		$\{$(Unità)$\}$
	$(\neg A \lor \neg C) \lor (A \lor B)$	
$\equiv$		$\{$(Terzo Escluso)$\}$
	$(\mathbf{T} \lor \neg C) \lor B$	
$\equiv$		$\{$(Dominanza)$\}$
	$\mathbf{T}$	

Come si vede che una Formula non è una Tautologia?

- Esempio: (3) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
- Basta trovare un'interpretazione che la rende falsa
- Evitare di costruire l'intera tabella di verità!!!
  - Determiniamo valori di verità per A, B e C che rendano falsa la formula
  - Poiché è un'implicazione, è falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa
  - Quindi $(B \Rightarrow C)$ deve essere falso, quindi $\{B \mapsto \mathbf{1}, C \mapsto \mathbf{0}\}$
  - A questo punto si vede che per qualunque valore di A la premessa è vera.
  - Quindi le seguenti interpretazioni rendono la formula falsa: $\{A \mapsto \mathbf{1}, B \mapsto \mathbf{1}, C \mapsto \mathbf{0}\}$ e $\{A \mapsto \mathbf{0}, B \mapsto \mathbf{1}, C \mapsto \mathbf{0}\}$

Come si vede che una Formula non è una Tautologia? (2)

Mostrare che $((A \Rightarrow B) \wedge \neg A) \Rightarrow B$ non è una tautologia

- Poiché è un'implicazione, è falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa
- Quindi $\{B \mapsto \mathbf{0}\}$
- La premessa è una congiunzione: per essere vera entrambi gli argomenti devono essere veri
- $\neg A$ è vera solo se $\{A \mapsto \mathbf{0}\}$
- Quindi abbiamo trovato l'interpretazione $\{A \mapsto \mathbf{0}, B \mapsto \mathbf{0}\}$
- Resta da controllare che renda la formula falsa

Tautologia o no?

La formula $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$ è una tautologia oppure no?

- Proviamo a mostrare che non lo è, cercando un controesempio. Poiché è un'implicazione, è falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa
- Quindi $\{B \mapsto \mathbf{0}\}$
- La premessa è una congiunzione: per essere vera entrambi gli argomenti devono essere veri
- Quindi $\{A \mapsto \mathbf{1}\}$
- Ma l'interpretazione trovata, $\{A \mapsto \mathbf{1}, B \mapsto \mathbf{0}\}$ non rende falsa la formula, perché $A \Rightarrow B$ è falso.
- Infatti la formula è una tautologia, come si può dimostrare facilmente, e viene chiamata **Modus Ponens**.

Altre Leggi utili: Leggi di Complemento

$$\boxed{\begin{array}{ll} p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q & (Complemento) \\ p \wedge (\neg p \vee q) \equiv p \wedge q & \end{array}}$$

Dimostrazione di $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$

$$\begin{array}{lll} & p \vee (\neg p \wedge q) & \\ \equiv & & \{(\text{Distr.})\} \\ & (p \vee \neg p) \wedge (p \wedge q) & \\ \equiv & & \{(\text{Terzo Escluso})\} \\ & \mathbf{T} \wedge (p \wedge q) & \\ \equiv & & \{(\text{Unità})\} \\ & (p \wedge q) & \end{array}$$

Leggi di Assorbimento

$$\boxed{\begin{array}{ll} p \wedge (p \vee q) \equiv p & (Assorbimento) \\ p \vee (p \wedge q) \equiv p & \end{array}}$$

Dimostrazione di $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$$\begin{array}{lll} & p \wedge (p \vee q)) & \\ \equiv & & \{(\text{Unità})\} \\ & (p \vee \mathbf{F}) \wedge (p \vee q) & \\ \equiv & & \{(\text{Distr.})\} \\ & p \ \vee (\mathbf{F} \wedge q) & \\ \equiv & & \{(\text{Zero})\} \\ & p \vee \mathbf{F} & \\ \equiv & & \{(\text{Unità})\} \\ & p & \end{array}$$

Sintassi del Calcolo Proposizionale, nuovamente...

- Formule Proposizionali definite dalla seguente grammatica:

$$
\begin{array}{lcl}
\langle Prop \rangle & ::= & \langle Prop \rangle \equiv \langle Prop \rangle \mid \langle Prop \rangle \wedge \langle Prop \rangle \mid \\
 & & \langle Prop \rangle \vee \langle Prop \rangle \mid \langle Prop \rangle \Rightarrow \langle Prop \rangle \mid \\
 & & \langle Prop \rangle \ \Leftarrow \ \langle Prop \rangle \mid \langle Atom \rangle \mid \neg \langle Atom \rangle \\
\langle Atom \rangle & ::= & \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \langle Ide \rangle \mid (\langle Prop \rangle) \\
\langle Ide \rangle & ::= & p \mid q \mid \ldots \mid P \mid Q \mid \ldots
\end{array}
$$

- *Categorie sintattiche*: $\langle Prop \rangle$(*iniziale*), $\langle Atom \rangle$, $\langle Ide \rangle$
- Tutti gli altri simboli sono *terminali*: $\equiv$, $\wedge$, $\ldots$, $\neg$, (,), **T**, **F**, p, q, $\ldots$
- Esempio di **derivazione**: $\langle Prop \rangle \quad \rightarrow^* \quad P \Rightarrow \neg P \Rightarrow Q$
- Esempio di **albero di derivazione**: $P \Rightarrow \neg P \Rightarrow Q$
- Esempio di valutazione della formula usando albero di derivazione

Esempio di Derivazione

$$
\begin{array}{lll}
& \underline{\langle Prop \rangle} & \\
\rightarrow & & \{\langle Prop \rangle ::= \langle Prop \rangle \Rightarrow \langle Prop \rangle\} \\
& \underline{\langle Prop \rangle} \Rightarrow \langle Prop \rangle & \\
\rightarrow & & \{\langle Prop \rangle ::= \langle Atom \rangle\} \\
& \underline{\langle Atom \rangle} \Rightarrow \langle Prop \rangle & \\
\rightarrow & & \{\langle Atom \rangle ::= \langle Ide \rangle, \langle Ide \rangle ::= P\} \\
& P \Rightarrow \underline{\langle Prop \rangle} & \\
\rightarrow & & \{\langle Prop \rangle ::= \langle Prop \rangle \Rightarrow \langle Prop \rangle\} \\
& P \Rightarrow \langle Prop \rangle \Rightarrow \underline{\langle Prop \rangle} & \\
\rightarrow & & \{\langle Prop \rangle ::= \langle Atom \rangle, \langle Atom \rangle ::= \langle Ide \rangle\} \\
& P \Rightarrow \langle Prop \rangle \Rightarrow \underline{\langle Ide \rangle} & \\
\rightarrow & & \{\langle Ide \rangle ::= Q\} \\
& P \Rightarrow \underline{\langle Prop \rangle} \Rightarrow Q & \\
\rightarrow & & \{\langle Prop \rangle ::= \neg\langle Atom \rangle, \langle Atom \rangle ::= \langle Ide \rangle\} \\
& P \Rightarrow \neg\underline{\langle Ide \rangle} \Rightarrow Q & \\
\rightarrow & & \{\langle Ide \rangle ::= P\} \\
& \mathbf{P} \Rightarrow \neg\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q} &
\end{array}
$$

Esempio di Derivazione e Albero di Derivazione

$\underline{\langle Prop \rangle}$

$\rightarrow \quad \{\langle Prop \rangle ::= \langle Prop \rangle \Rightarrow \langle Prop \rangle\}$

$\underline{\langle Prop \rangle} \Rightarrow \langle Prop \rangle$

$\rightarrow \quad \{\langle Prop \rangle ::= \langle Atom \rangle\}$

$\underline{\langle Atom \rangle} \Rightarrow \langle Prop \rangle$

$\rightarrow \quad \{\langle Atom \rangle ::= \langle Ide \rangle, \langle Ide \rangle ::= P\}$

$P \Rightarrow \underline{\langle Prop \rangle}$

$\rightarrow \quad \{\langle Prop \rangle ::= \langle Prop \rangle \Rightarrow \langle Prop \rangle\}$

$P \Rightarrow \langle Prop \rangle \Rightarrow \underline{\langle Prop \rangle}$

$\rightarrow \quad \{\langle Prop \rangle ::= \langle Atom \rangle, \langle Atom \rangle ::= \langle Ide \rangle\}$

$P \Rightarrow \langle Prop \rangle \Rightarrow \underline{\langle Ide \rangle}$

$\rightarrow \quad \{\langle Ide \rangle ::= Q\}$

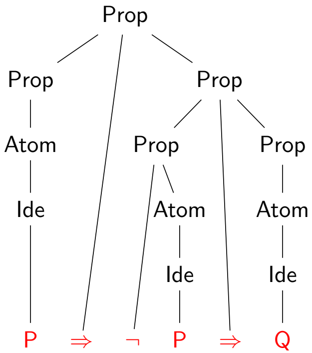
$P \Rightarrow \underline{\langle Prop \rangle} \Rightarrow Q$

$\rightarrow \quad \{\langle Prop \rangle ::= \neg\langle Atom \rangle, \langle Atom \rangle ::= \langle Ide \rangle\}$

$P \Rightarrow \neg\underline{\langle Ide \rangle} \Rightarrow Q$

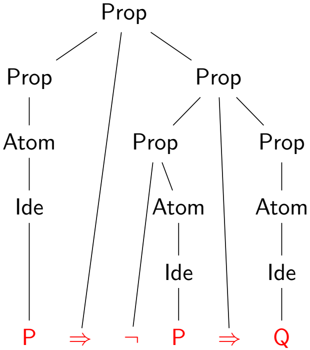
$\rightarrow \quad \{\langle Ide \rangle ::= P\}$

$\mathbf{P} \Rightarrow \neg\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$



Ambiguità della Grammatica: un Esempio

- La formula $P \Rightarrow \neg P \Rightarrow Q$ ha due alberi di derivazione diversi, che forniscono valori diversi per la stessa interpretazione $P \mapsto 0, Q \mapsto 0$.



- Esercizio: mostrare che la prima è una tautologia, la seconda no

Precedenza tra Connettivi

- Stabiliamo i seguenti livelli di precedenza tra connettivi logici, per disambiguare le proposizioni:

operatore	*livello di precedenza (crescente)*
$\equiv$	0
$\Rightarrow$, $\Leftarrow$	1
$\wedge, \vee$	2
$\neg$	3

- Per esempio,
  - $(P \Rightarrow (Q \wedge R) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R))$ si può scrivere come $P \Rightarrow Q \wedge R \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$
- Si noti che **non** stabiliamo
  - una precedenza tra $\wedge$ e $\vee$
  - regole di associatività per connettivi binari ($\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\ldots$)

Come leggere le formule...

- $P \wedge Q \Rightarrow R \equiv R \vee P \Rightarrow S$
  Ok, per le regole di precedenza diventa $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \equiv ((R \vee P) \Rightarrow S)$
- $P \wedge Q \wedge R$
  La formula è *sintatticamente ambigua* (ha due alberi di derivazione) ma per (Associatività-$\wedge$) abbiamo $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$, quindi la consideriamo **sintatticamente corretta**
- $P \wedge Q \vee R$
  Sintatticamente errata!!! Mostrare che $(P \wedge Q) \vee R$ e $P \wedge (Q \vee R)$ non sono equivalenti.
- $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ **Sintatticamente errata!!!**
- $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ Ok, si legge $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$ (Elim-$\Rightarrow$), **ma attenzione quando si applica!**
  $\underline{P \Rightarrow Q \wedge R} \equiv \underline{\neg P \vee (Q \wedge R)}$

Altre leggi utili

$P \wedge Q \Rightarrow P$	$(Sempl - \wedge)$
$P \Rightarrow P \vee Q$	$(Intro - \vee)$
$P \Rightarrow Q \ \equiv \ \neg Q \Rightarrow \neg P$	$(Contropositiva)$
$(P \equiv Q) \ \equiv \ (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	$(Elim- \equiv -bis)$
$P \wedge Q \Rightarrow R \ \equiv \ P \wedge \neg R \Rightarrow \neg Q$	$(Scambio)$