

Logica per la Programmazione

Lezione 6

- ▶ Logica del Primo Ordine
 - ▶ Motivazioni
 - ▶ Sintassi di Termini e Formule
 - ▶ Formule aperte e chiuse

Limiti del Calcolo Proporzionale

- ▶ Nella formalizzazione di enunciati dichiarativi, gli **enunciati atomici** non hanno struttura (sono rappresentati da variabili proposizionali)
- ▶ **Es: “Alberto va al cinema con Bruno o va al teatro con Carlo”**
Introduciamo 4 proposizioni atomiche:
 - ▶ $AC \equiv$ Alberto va al cinema
 - ▶ $BC \equiv$ Bruno va al cinema
 - ▶ $AT \equiv$ Alberto va al teatro
 - ▶ $CT \equiv$ Carlo va al teatro
- ▶ Formula proposizionale: $(AC \wedge BC) \vee (AT \wedge CT)$
- ▶ Tuttavia, “Alberto”, “Bruno”, ... “cinema” ..., gli individui del nostro discorso e le relazioni tra di essi (“andare al”) scompaiono...

Limiti del Calcolo Proposizionale (2)

Le formule proposizionali possono descrivere **relazioni logiche tra un numero finito di enunciati**, ma

- ▶ Vorremmo esprimere proprietà di un' **infinità di individui**:
 - ▶ “tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi”
In CP(?) (“4 non è primo”) \wedge (“6 non è primo”) \wedge ... **NO!**
 - ▶ “esiste almeno un numero naturale maggiore di due che non è primo”
In CP(?) (“3 non è primo”) \vee (“4 non è primo”) \vee ... **NO!**
- ▶ Vorremmo poter esprimere **proprietà “generalì”** come
“se x è pari allora $x+1$ è dispari”
... e riconoscere che da esse derivano proprietà specifiche come
“se 4 è pari allora 5 è dispari”

Limiti del Calcolo Proposizionale (3)

Anche se descriviamo **proprietà di un numero finito di enunciati** vorremmo descriverli in maniera **compatta**

- ▶ **“tutti gli studenti di LPP vanno al cinema”**

In CP(?) $S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \dots \wedge S_{150}$

- ▶ **“tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema”**

In CP(?)

$$(\neg S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \dots \wedge S_{150}) \vee$$

$$(S_1 \wedge \neg S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \dots \wedge S_{150}) \vee$$

$$(S_1 \wedge S_2 \wedge \neg S_3 \wedge S_4 \dots \wedge S_{150}) \vee$$

$$(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge \neg S_4 \dots \wedge S_{150}) \vee$$

...

$$(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \dots \wedge \neg S_{150})$$

Verso la Logica del Primo Ordine

- ▶ La **Logica del Primo Ordine** (LPO) estende (include) il **Calcolo Proporzionale**
- ▶ Con le formule di LPO
 - ▶ si possono denotare/rappresentare esplicitamente gli elementi del **dominio di interesse** (gli individui, usando i **termini**)
 - ▶ si possono esprimere **proprietà** di individui e **relazioni** tra due o più individui (usando i **predicati**)
 - ▶ si può **quantificare** una formula, dicendo che vale **per almeno** un individuo, o **per tutti** gli individui (usando i **quantificatori**)

La Logica del Primo Ordine

- ▶ Presenteremo **Sintassi**, **Semantica** e **Sistema di Dimostrazioni**
- ▶ Useremo **formule** della LPO per formalizzare enunciati dichiarativi
- ▶ La **semantica** di una formula di LPO è sempre un valore booleano assegnato in base ad una **interpretazione**, come per il Calcolo Proposizionale, ma determinato in modo molto più complesso. . .
- ▶ Come per il Calcolo Proposizionale, ci interessano le formule che sono “sempre vere” (**formule valide** analoghe alle **tautologie**)
- ▶ **Non esistono tabelle di verità**: per vedere se una formula è valida occorre dimostrarlo (e non sempre è possibile trovare una dimostrazione)

Espressività della Logica del Primo Ordine

Esempi (li analizzeremo meglio in seguito):

- ▶ Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi:

$$(\forall x. \text{pari}(x) \wedge x > 2 \Rightarrow \neg \text{primo}(x))$$

- ▶ Esiste almeno un numero naturale maggiore di due che non è primo

$$(\exists x. x > 2 \wedge \neg \text{primo}(x))$$

- ▶ Se x è pari allora $x+1$ è dispari (*) $(\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(x + 1))$
- ▶ (*) implica “se 4 è pari allora 5 è dispari”

$$(\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(x + 1)) \Rightarrow (\text{pari}(4) \Rightarrow \text{dispari}(5))$$

Espressività della Logica del Primo Ordine (2)

- ▶ Tutti gli studenti di LPP vanno al cinema:

$$(\forall x. \text{studente}(x) \wedge \text{frequenta}(x, LPP) \Rightarrow \text{vaAlCinema}(x))$$

- ▶ Tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema:

$$(\exists x. \text{studente}(x) \wedge \text{frequenta}(x, LPP) \wedge \neg \text{vaAlCinema}(x) \wedge$$

$$(\forall y. \text{studente}(y) \wedge \text{frequenta}(y, LPP) \wedge \neg(y = x) \Rightarrow \text{vaAlCinema}(y)))$$

Logica del Primo Ordine: commenti

Nella Logica del Primo Ordine ci sono due categorie **sintattiche** e **semantiche** differenti

- ▶ i **termini** che sono passati come argomenti dei predicati e denotano **elementi del dominio di riferimento**
- ▶ le **formule** costruite a partire dai predicati e che assumono valore booleano

La Sintassi della Logica del Primo Ordine: l'Alfabeto

Un **alfabeto** del primo ordine comprende:

- ▶ Un insieme \mathcal{V} di simboli di **variabile**
- ▶ Un insieme \mathcal{C} di simboli di **costante**
- ▶ Un insieme \mathcal{F} di simboli di **funzione**, ognuno con la sua **arietà** (o **numero di argomenti**)
- ▶ Un insieme \mathcal{P} di simboli di **predicato**, ognuno con la sua **arietà** (eventualmente 0)
- ▶ I simboli $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv, \Leftarrow$ (**connettivi logici**)
- ▶ I simboli \forall, \exists (**quantificatori**)
- ▶ I simboli $()$ [parentesi] , [virgola] . [punto]

La Sintassi della Logica del Primo Ordine: la Grammatica

Estende la grammatica del **Calcolo Proporzionale** con **nuove produzioni**

$$\begin{aligned}
 Fbf & ::= \\
 & Fbf \equiv Fbf \mid Fbf \wedge Fbf \mid Fbf \vee Fbf \mid \\
 & Fbf \Rightarrow Fbf \mid Fbf \Leftarrow Fbf \\
 & Atom \mid \neg Atom \\
 Atom & ::= \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid Pred \mid (Fbf) \mid (FbfQuant) \\
 FbfQuant & ::= (\forall Var.Fbf) \mid (\exists Var.Fbf) \\
 Pred & ::= Plde \mid Plde(Term\{, Term\}) \\
 Term & ::= Const \mid Var \mid Flde(Term\{, Term\})
 \end{aligned}$$

dove

- ▶ $Var \in \mathcal{V}$ è un simbolo di **variabile**,
- ▶ $Const \in \mathcal{C}$ è un simbolo di **costante**,
- ▶ $Flde \in \mathcal{F}$ è un simbolo di **funzione**, e
- ▶ $Plde \in \mathcal{P}$ è un simbolo di **predicato**.

Sintassi della Logica del Primo Ordine: i Termini

I **termini** denotano “elementi del dominio di interesse” (“individui”). Sono definiti dalla categoria sintattica *Term*:

$$Term ::= Const \mid Var \mid Flde(Term\{, Term\})$$

- ▶ Quindi i termini sono definiti **induttivamente**, a partire da un alfabeto \mathcal{V} , \mathcal{C} , \mathcal{F} e \mathcal{P} , nel modo seguente:
 - ▶ Ogni **costante** $c \in \mathcal{C}$ è un termine
 - ▶ Ogni **variabile** $x \in \mathcal{V}$ è un termine
 - ▶ Se $f \in \mathcal{F}$ è un **simbolo di funzione** con arietà n e t_1, \dots, t_n sono termini, allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine

Termini: Esempi

- ▶ a , con $a \in \mathcal{C}$
- ▶ x , con $x \in \mathcal{V}$
- ▶ $g(a)$, con $g \in \mathcal{F}$ di arietà 1
- ▶ $f(x, g(a))$, con $f \in \mathcal{F}$ di arietà 2
- ▶ **Notazione**: I ben noti simboli di funzione binari a volte sono rappresentati con notazione **infissa**.
- ▶ **Esempio**: $x + (1 * z)$, è un termine con $+, * \in \mathcal{F}$ con arietà 2

Sintassi della Logica del Primo Ordine: le Formule (1)

Le **formule** rappresentano enunciati dichiarativi. Sono definite **induttivamente** come segue, fissato un alfabeto \mathcal{V} , \mathcal{C} , \mathcal{F} e \mathcal{P} :

- ▶ Se $p \in \mathcal{P}$ è un **simbolo di predicato** allora
 - ▶ se ha arietà 0 allora p è una **formula**. Corrisponde a una **variabile proposizionale** nel CP, e lo scriviamo p invece di $p()$
 - ▶ se ha arietà $n > 0$ e t_1, \dots, t_n sono **termini** allora $p(t_1, \dots, t_n)$ è una **formula**.

Queste sono le formule corrispondenti alla categoria sintattica *Pred*:

$$Pred := Plde \mid Plde(Term\{, Term\})$$

- ▶ A volte usiamo **notazione infissa** per simboli di arietà 2.
- ▶ Esempio: $x=y$ o $z \leq f(x)$ con $=, \leq, \in \mathcal{P}$ con arietà 2

Sintassi della Logica del Primo Ordine: le Formule (2)

Le rimanenti categorie sintattiche sono

$$\begin{aligned}
 Fbf & ::= \\
 & Fbf \equiv Fbf \mid Fbf \wedge Fbf \mid Fbf \vee Fbf \mid \\
 & Fbf \Rightarrow Fbf \mid Fbf \Leftarrow Fbf \\
 & Atom \mid \neg Atom \\
 Atom & ::= \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid Pred \mid (Fbf) \mid (FbfQuant) \\
 FbfQuant & ::= (\forall Var.Fbf) \mid (\exists Var.Fbf)
 \end{aligned}$$

e definiscono le formule induttivamente come segue

- ▶ **T** e **F** sono formule
- ▶ Se P è una formula allora $\neg P$ è una formula
- ▶ Se P e Q sono formule allora $P \wedge Q, P \vee Q, P \Rightarrow Q, P \equiv Q, P \Leftarrow Q$ sono formule
- ▶ Se P è una formula e $x \in \mathcal{V}$, allora $(\forall x.P)$ e $(\exists x.P)$
- ▶ Se P è una formula allora anche (P) è una formula

Sintassi delle Formule: Esempi

- ▶ Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi

$$(\forall x. \text{pari}(x) \wedge x > 2 \Rightarrow \neg \text{primo}(x))$$

- ▶ Se x è pari allora il successore di x è dispari

$$(\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(x+1))$$

- ▶ Se x è pari allora $x + 1$ è dispari” implica “se 4 è pari allora 5 è dispari

$$(\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(x+1) \Rightarrow (\text{pari}(4) \Rightarrow \text{dispari}(5)))$$

Simboli di Variabile? Simboli di Predicato? Simboli di Funzione? Simboli di Costante?

Occorrenze di Variabili Libere o Legate

- ▶ In una formula quantificata come $(\forall x.P)$ o $(\exists y.P)$ la sottoformula P è detta la **portata** del quantificatore.
- ▶ Una occorrenza di variabile x è **legata** se compare nella portata di un quantificatore altrimenti è detta **libera**.
- ▶ **Esempio:**

$$(\forall y.z = y \wedge (x = y \vee (\exists x.x = z \vee z = y)))$$

- ▶ Portata di $\forall y$?
- ▶ Portata di $\exists x$?
- ▶ Occorrenze di variabili **legate**?
- ▶ Occorrenze di variabili **libere**?

Formule Aperte e Chiuse

- ▶ Il nome di una variabile legata può essere cambiato grazie alle leggi di **ridenominazione**:

$$(\forall x.P) \equiv (\forall y.P[y/x]) \quad \text{se } y \text{ non compare in } P \quad (\text{Ridenom.})$$

$$(\exists x.P) \equiv (\exists y.P[y/x]) \quad \text{se } y \text{ non compare in } P \quad (\text{Ridenom.})$$

Attenzione: qui $P[y/x]$ rappresenta la formula P in cui TUTTE le occorrenze di x sono sostituite da y

- ▶ Una formula che contiene occorrenze di variabili libere è detta **aperta**
- ▶ Spesso scriveremo $P(x)$ per indicare che x è libera nella formula P
- ▶ Una formula senza variabili libere è detta **chiusa**. Considereremo principalmente **formule chiuse**.