Logica per la Programmazione

Lezione 9

- Proof System per la Logica del Primo Ordine
- Leggi per i Quantificatori
- Regole di inferenza: Generalizzazione e Skolemizzazione

Leggi per i Quantificatori

- Per il Calcolo Proposizionale, le leggi che abbiamo visto sono **tautologie**: lo abbiamo dimostrato usando tavole di verità o dimostrazioni di vario formato
- Per LPO le **leggi** sono **formule valide**
- Per convincerci della validità di una legge possiamo usare
  - la definizione di validità, oppure
  - una dimostrazione che usi solo premesse valide
- Ricordiamo che in una formula con quantificatore come $(\forall x.P)$ la portata di $\forall x$ è la sottoformula P. Analogamente, in $(\exists x.P)$ la portata di $\exists x$ è la sottoformula P.

Leggi per i Quantificatori: (1)

- (elim-$\forall$)

$$(\forall x.P) \Rightarrow P[t/x]$$

  dove t è un **termine chiuso** e $P[t/x]$ è ottenuto da P sostituendo tutte le occorrenze libere di x in P con t.
  - *Nota*: un termine chiuso contiene solo costanti e simboli di funzione, non variabili.
- Esempi:

$$\begin{array}{ll} & (\forall x.pari(x) \wedge x > 2 \Rightarrow \neg primo(x)) \\ \Rightarrow & \{(\mathrm{elim} - \forall)\} \\ & pari(7) \wedge 7 > 2 \Rightarrow \neg primo(7) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & (\forall x.uomo(x) \Rightarrow mortale(x)) \\ \Rightarrow & \{(\mathrm{elim} - \forall)\} \\ & uomo(Socrate) \Rightarrow mortale(Socrate) \end{array}$$

Validità della Legge (elim-$\forall$)

- Poiché non abbiamo visto altre leggi, usiamo la definizione di validità: (elim-$\forall$) deve essere vera in qualunque interpretazione
- Sia $\phi \equiv (\forall x.P) \Rightarrow P[t/x]$.
- **Per assurdo**: sia $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ tale che $\mathcal{I}_\rho(\phi) = \mathbf{F}$ per ρ qualunque
- Per (S6), $\mathcal{I}_\rho(\phi) = \mathbf{F}$ sse $\mathcal{I}_\rho((\forall x.P)) = \mathbf{T}$ e $\mathcal{I}_\rho(P[t/x]) = \mathbf{F}$
- Se $\mathcal{I}_\rho((\forall x.P)) = \mathbf{T}$, per (S8) abbiamo: $\mathcal{I}_{\rho[d/x]}(P) = \mathbf{T}$ per qualunque d in $\mathcal{D}$.
- ... e quindi in particolare $\mathcal{I}_{\rho[\underline{d}/x]}(P) = \mathbf{T}$ con $\underline{\mathbf{d}} = \alpha_\rho(\mathbf{t})$
- Ma allora $\mathcal{I}_\rho(P[t/x]) = \mathbf{T}$, e abbiamo ottenuto una contraddizione [Abbiamo usato $\mathcal{I}(P[t/x])_\rho = \mathcal{I}_{\rho[\underline{d}/x]}(P)$, che si può dimostrare per induzione strutturale su t]

Leggi per i Quantificatori (2)

- (intro-∃)

$$P[t/x] \Rightarrow (\exists x.P)$$

dove t è un **termine chiuso** e $P[t/x]$ è ottenuto da P sostituendo tutte le occorrenze libere di x in P con t

- Esempio:

$$\begin{array}{ll} & pari(10) \wedge 10 > 2 \\ \Rightarrow & \{(\text{intro} - \exists)\} \\ & (\exists x.pari(x) \wedge x > 2) \end{array}$$

- **Esercizio**: Dimostrare la validità di (intro-∃) utilizzando la definizione di validità di una formula, come visto per (elim-∀).

Leggi per i Quantificatori (3)

- $$\neg(\forall x.P) \equiv (\exists x.\neg P) \quad \text{(De Morgan)}$$
  $$\neg(\exists x.P) \equiv (\forall x.\neg P)$$

- $$(\forall x.(\forall y.P)) \equiv (\forall y.(\forall x.P)) \quad \text{(Annidamento)}$$
  $$(\exists x.(\exists y.P)) \equiv (\exists y.(\exists x.P))$$

- Le seguenti leggi (costante) valgono solo se si assume che il **dominio di interpretazione non sia vuoto**:

  $$(\forall x.P) \equiv P \quad \text{se } x \text{ non occorre in } P$$

  $$(\exists x.P) \equiv P \quad \text{se } x \text{ non occorre in } P$$

- **Esercizio**: Dimostrare la validità delle leggi presentate.

Leggi per i Quantificatori (4)

- $$(\forall x.P \wedge Q) \equiv (\forall x.P) \wedge (\forall x.Q) \quad (\forall : \wedge)$$
  $$(\exists x.P \vee Q) \equiv (\exists x.P) \vee (\exists x.Q) \quad (\exists : \vee)$$
- $$(\forall x.P) \vee (\forall x.Q) \Rightarrow (\forall x.P \vee Q) \quad (\forall : \vee)$$
  $$(\exists x.P \wedge Q) \Rightarrow (\exists x.P) \wedge (\exists x.Q) \quad (\exists : \wedge)$$
- $$(\forall x.P \vee Q) \equiv (\forall x.P) \vee Q \text{ se } x \text{ non occorre in } Q \quad (\mathit{Distrib.})$$
  $$(\exists x.P \wedge Q) \equiv (\exists x.P) \wedge Q \text{ se } x \text{ non occorre in } Q \quad (\mathit{Distrib.})$$
- **Esercizio**: Dimostrare la validità delle leggi presentate.

Altre Leggi per i Quantificatori, da dimostrare

- Le seguenti leggi (Distrib.) valgono solo se si assume che il dominio di interpretazione non sia vuoto:

$$(\forall x.P \wedge Q) \equiv (\forall x.P) \wedge Q \text{ se } x \text{ non occorre in } Q \quad (\mathit{Distrib.})$$
$$(\exists x.P \vee Q) \equiv (\exists x.P) \vee Q \text{ se } x \text{ non occorre in } Q \quad (\mathit{Distrib.})$$

- Per esercizio:

$$(\forall x.P) \Rightarrow (\forall x.P \vee Q) \qquad (\forall x.P \wedge Q) \Rightarrow (\forall x.P)$$

$$(\exists x.P) \Rightarrow (\exists x.P \vee Q) \qquad (\exists x.P \wedge Q) \Rightarrow (\exists x.P)$$

Quantificazione ristretta ad un Insieme: Domini

- Spesso la quantificazione (universale o esistenziale) è ristretta agli elementi che soddisfano una formula P:

$$(\forall x.P \Rightarrow Q)$$
$$(\exists x.P \wedge Q)$$

- In queste formule, la formula P è il dominio del quantificatore
- Si introducono le **seguenti abbreviazioni**:
  $(\forall x \,.\, P \Rightarrow Q)$ viene scritta come $(\forall x : P \,.\, Q)$
  $(\exists x \,.\, P \wedge Q)$ viene scritta come $(\exists x : P \,.\, Q)$
- **Attenzione**: queste abbreviazioni vengono usate diffusamente nelle dispense, ma le eviteremo a lezione. Nei compiti d'esame potete usarle a vostro piacimento.

Formule Vacuamente Vere

- Sia P una formula con x libera, e $I = (\mathcal{D}, \alpha)$ un'interpretazione
- Diciamo che

  il dominio P è vuoto in I se vale $I_\rho[(\exists x.P)] = \mathbf{F}$ $\quad(\dagger)$
- Allora valgono i seguenti fatti:
  1. La formula $(\forall x \,.\, P \Rightarrow Q)$ è **vacuamente** vera in I se il dominio P è vuoto in I.
  2. Dualmente, la formula $(\exists x \,.\, P \wedge Q)$ è **vacuamente** falsa in I se il dominio P è vuoto in I.
- Prima di dimostrare (1.) osserviamo che $(\dagger)$ può essere riformulato come:

  P è vuoto in I **se per ogni $d \in \mathcal{D}$ vale** $I_{\rho[d/x]}[P] = \mathbf{F}$ $\quad(\ddagger)$

  applicando (S3), (De Morgan) e (S8).

  Esercizio: verificare questa affermazione.

Formule Vacuamente Vere (2)

- Dimostriamo la (1.), mostriando che se P è vuoto in I, allora $I_\rho[(\forall x.P \Rightarrow Q)] \equiv \mathbf{T}$ indipendentemente da Q.

$$
\begin{array}{ll}
 & I_\rho[(\forall x.P \Rightarrow Q)] \equiv \mathbf{T} \\
\equiv & \quad \{(\text{Elim-}\Rightarrow)\} \\
 & I_\rho[(\forall x.\neg P \vee Q)] \equiv \mathbf{T} \\
\equiv & \quad \{(\text{Regola (S8)})\} \\
 & \text{per ogni } d \in \mathcal{D},\ I_{\rho[d/x]}[\neg P \vee Q] \equiv \mathbf{T} \\
\equiv & \quad \{(\text{Regola (S5)})\} \\
 & \text{per ogni } d \in \mathcal{D},\ I_{\rho[d/x]}[\neg P] \equiv \mathbf{T} \text{ oppure } I_{\rho[d/x]}[Q] \equiv \mathbf{T} \\
\equiv & \quad \{(\text{Regola (S3)})\} \\
 & \text{per ogni } d \in \mathcal{D},\ I_{\rho[d/x]}[P] \equiv \mathbf{F} \text{ oppure } I_{\rho[d/x]}[Q] \equiv \mathbf{T} \\
\equiv & \quad \{\textbf{Ip: } P \text{ vuoto, condizione } (\ddagger) \text{ della pagina precedente}\} \\
 & \mathbf{T}
\end{array}
$$

Alcune leggi per Quantificatori con Dominio

- Leggi per unione di domini:
  - $(\forall x . P \vee Q \Rightarrow R) \equiv (\forall x . P \Rightarrow R) \wedge (\forall x . Q \Rightarrow R)$ (Dominio)
  - $(\exists x . (P \vee Q) \wedge R) \equiv (\exists x . P \wedge R) \vee (\exists x . Q \wedge R)$ (Dominio)

- Molte leggi per quantificatori valgono anche se si quantifica su di un dominio esplicito. Vediamone due (le altre sono in [LP2]):
  - $(\forall x . R \Rightarrow P \wedge Q) \equiv (\forall x . R \Rightarrow P) \wedge (\forall x . R \Rightarrow Q)$ $(\forall : \wedge)$
  - $\neg(\exists x . R \wedge P) \equiv (\forall x . R \Rightarrow \neg P)$ (De Morgan)

Esercizio: Dimostrare le leggi sfruttando le analoghe leggi senza dominio

Linguaggio del Primo Ordine con Uguaglianza

- Considereremo sempre linguaggi del primo ordine con uguaglianza, cioè con il simbolo speciale di predicato binario "$=$" (quindi $= \in \mathcal{P}$)
- Il significato di "$=$" è fissato: per qualunque interpretazione, la formula $\mathbf{t} = \mathbf{t}'$ è vera se e solo se $\mathbf{t}$ e $\mathbf{t}'$ denotano lo stesso elemento del dominio di interesse
- Più formalmente: data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \to \mathcal{D}$, abbiamo $\mathcal{I}_\rho(\mathbf{t} = \mathbf{t}') = \mathbf{T}$ se $\alpha_\rho(\mathbf{t}) = \alpha_\rho(\mathbf{t}')$ (cioè se le semantiche di $\mathbf{t}$ e $\mathbf{t}'$ coincidono), $\mathbf{F}$ altrimenti

Leggi per l'Uguaglianza

- Per il predicato di uguaglianza valgono le seguenti leggi (dove la x può comparire libera in P):

$$(1) \quad (\forall x\,.\,(\forall y\,.\,(x = y) \;\Rightarrow\; (P \equiv P[y/x]))) \qquad \textit{(Leibniz)}$$

$$(2) \quad (\forall x\,.\,(\forall y\,.\,(x = y) \wedge P \equiv (x = y) \wedge P[y/x]))$$

$$(3) \quad (\forall x\,.\,(\forall y\,.\,(x = y) \wedge P \;\Rightarrow\; P[y/x]))$$

$$(\forall y\,.\,(\forall x\,.\,(x = y) \Rightarrow P) \equiv P[y/x]) \qquad \textit{(singoletto)}$$

$$(\forall y\,.\,(\exists x\,.\,(x = y) \wedge P) \equiv P[y/x])$$

- **Esercizio**: Dimostrare che (1) $\equiv$ (2) e che (1) $\Rightarrow$ (3).

Regole di Inferenza: La Regola di Generalizzazione

- Per dimostrare una formula del tipo $(\forall x.P)$ possiamo procedere sostituendo x con un nuovo simbolo di costante d e dimostrare $P[d/x]$

$$\frac{\Gamma \vdash P[d/x], \text{ con } d \text{ nuova costante}}{\Gamma \vdash (\forall x.P)}$$

- Intuitivamente, d rappresenta un **generico elemento del dominio** sul quale non possiamo fare alcuna ipotesi

Leggi per l'Uguaglianza e Generalizzazione

- Attenzione: spesso (e anche nella dispensa) queste leggi sono scritte informalmente *senza* quantificazioni:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (x = y) \;\Rightarrow\; (P \equiv P[y/x]) & \qquad (\mathit{Leibniz}) \\
(2) & (x = y) \wedge P \equiv (x = y) \wedge P[y/x]) & \\
(3) & (x = y) \wedge P \;\Rightarrow\; P[y/x] &
\end{array}
$$

- Se consideriamo x e y come variabili, sarebbero formule aperte, quindi non accettabili come leggi.
- Possiamo considerare la quantificazione universale implicita, quindi queste leggi come un abbreviazione di quelle presentate prima.
- Possiamo anche considerare x e y come costanti generiche e dedurre le formule quantificate universalmente con la Regola di Generalizzazione.

Regole di Inferenza: La Regola di Skolemizzazione

- Se sappiamo che $(\exists x.P)$ è vera, possiamo usarla per dimostrare una qualsiasi formula Q usando come ipotesi $P[d/x]$, dove d è una costante nuova, che non compare in Q:

$$\frac{\begin{array}{c}(\exists x.P) \in \Gamma \qquad \Gamma, P[d/x] \vdash Q \\ \text{con } d \text{ nuova costante che non occorre in } Q\end{array}}{\Gamma \vdash Q}$$

- Intuitivamente, è come se chiamassimo d un **ipotetico elemento del dominio** che testimonia la verità di $(\exists x.P)$.

Sulla Regola di Skolemizzazione

- Dal Teorema di Deduzione sappiamo che

$$\Gamma \vdash P \Rightarrow Q \qquad \text{se e solo se} \qquad \Gamma, P \vdash Q$$

- Sfruttiamo questo fatto per derivare dalla Regola di Skolemizzazione una regola più semplice, che usa solo implicazioni e non premesse.
- [Skolemizzazione], già vista

$$\frac{(\exists x.P) \in \Gamma \qquad \Gamma, P[d/x] \vdash Q \quad \text{con } d \text{ nuova costante che non occorre in } Q}{\Gamma \vdash Q}$$

- [Skolemizzazione-$\Rightarrow$]

$$\frac{(\exists x \,.\, P) \wedge P[d/x] \wedge R \Rightarrow Q \quad \text{con } d \text{ nuova costante che non occorre in } Q}{(\exists x \,.\, P) \wedge R \Rightarrow Q}$$

Esempi di formule dimostrabili con Skolemizzazione

1. $(\forall x \,.\, P \Rightarrow Q) \wedge (\exists x \,.\, P) \Rightarrow (\exists x \,.\, Q)$
2. $(\forall x \,.\, P) \wedge (\exists x \,.\, Q) \Rightarrow (\exists x \,.\, P)$
3. $(\forall x \,.\, P \Rightarrow R) \wedge (\exists x \,.\, P \wedge Q) \Rightarrow (\exists x \,.\, Q \wedge R)$
4. $\big((\forall x \,.\, P \wedge \neg R) \vee \neg(\exists x \,.\, Q \wedge \neg S)\big) \wedge (\exists x \,.\, Q \vee R) \;\Rightarrow\; \neg(\forall x \,.\, \neg P \wedge \neg(S \vee R))$

Esercizio: Dimostrare che la seguente formula non è valida:

$$(\forall x \,.\, P) \Rightarrow (\exists x \,.\, P)$$