LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2017-2018
Prima prova di verifica intermedia - 2/11/2017 - Soluzioni proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1
Si dimostri che la seguente proposizione è una tautologia, senza usare tabelle di verità:

$$(P \lor \neg S \Rightarrow Q \lor \neg R) \Rightarrow \neg R \;\equiv\; (R \Rightarrow \neg Q) \land (S \Rightarrow \neg R \lor P)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1
Per dimostrare la formula semplifichiamo prima il membro sinistro e poi quello destro dell'equivalenza, ottenendo due formule equivalenti:

$$\begin{array}{ll}
 & (\underline{P \lor \neg S \Rightarrow Q \lor \neg R}) \Rightarrow \neg R \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\} \\
 & \underline{\neg(P \lor \neg S) \lor (Q \lor \neg R) \Rightarrow \neg R} \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\} \\
 & \underline{\neg(\neg(P \lor \neg S) \lor (Q \lor \neg R))} \lor \neg R \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan}), (\text{Doppia Negazione})\} \\
 & ((P \lor \neg S) \land \underline{\neg(Q \lor \neg R)}) \lor \neg R \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan}), (\text{Doppia Negazione})\} \\
 & \underline{((P \lor \neg S) \land (\neg Q \land R)) \lor \neg R} \\
\equiv & \quad \{(\text{Complemento}), (\text{Associativa})\} \\
 & ((P \lor \neg S) \land \neg Q) \lor \neg R
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & (\underline{R \Rightarrow \neg Q}) \land (\underline{S \;\Rightarrow\; \neg R \lor P}) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow), \text{ due volte}\} \\
 & \underline{(\neg R \lor \neg Q) \land (\neg S \lor (\neg R \lor P))} \\
\equiv & \quad \{(\text{Distributiva}),(\text{Associativa})\} \\
 & \neg R \lor (\neg Q \land (\neg S \lor P))
\end{array}$$

ESERCIZIO 2
Per ognuna delle seguenti formule si dica se si tratta di una tautologia oppure no. Se è una tautologia si fornisca una dimostrazione altrimenti si fornisca un controesempio.

1. $(P \Rightarrow \neg((\neg Q \land \neg R) \lor R)) \land (S \Rightarrow R) \;\Rightarrow\; (P \Rightarrow \neg S)$
2. $(P \Rightarrow (\neg Q \land R) \lor \neg R) \land (S \Rightarrow R) \;\Rightarrow\; (P \Rightarrow \neg S)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

1. La formula è una tautologia. Mostriamo due dimostrazioni alternative.

   - Sviluppiamo una dimostrazione partendo dalla premessa dell'implicazione per arrivare alla conclusione:

$$\begin{array}{ll}
 & (P \Rightarrow \neg(\underline{(\neg Q \land \neg R) \lor R})) \land (S \Rightarrow R) \\
\equiv & \quad \{(\text{Complemento})\} \\
 & (P \Rightarrow \underline{\neg(\neg Q \lor R)}) \land (S \Rightarrow R) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan}),(\text{Doppia Negazione})\} \\
 & (P \Rightarrow \underline{Q \land \neg R}) \land (S \Rightarrow R) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{Sempl-}\land), \text{ occ. pos.}\}
\end{array}$$

$$(P \Rightarrow \neg R) \wedge (\underline{S \Rightarrow R})$$

$\equiv$ $\{$(Contropositiva)$\}$

$$\underline{(P \Rightarrow \neg R) \wedge (\neg R \Rightarrow \neg S)}$$

$\Rightarrow$ $\{$(trans-$\Rightarrow$), occ. pos.$\}$

$$(P \ \Rightarrow \ \neg S)$$

- Sviluppiamo una dimostrazione con le *ipotesi non tautologiche*. In particolare dimostriamo la formula $P \Rightarrow \neg S$ usando le formule $P \Rightarrow \neg((\neg Q \wedge \neg R) \vee R))$ e $S \Rightarrow R$ come *ipotesi non tautologiche*. Sviluppiamo la prova partendo dalla premessa dell'implicazione per arrivare alla conclusione:

$$\underline{P}$$

$\Rightarrow$ $\{$ **Ip**: $P \Rightarrow \neg((\neg Q \wedge \neg R) \vee R)$, occ. pos.$\}$

$$\neg(\underline{(\neg Q \wedge \neg R) \vee R})$$

$\equiv$ $\{$(Complemento)$\}$

$$\underline{\neg(\neg Q \vee R)}$$

$\equiv$ $\{$(De Morgan),(Doppia Negazione)$\}$

$$Q \wedge \underline{\neg R}$$

$\Rightarrow$ $\{$ **Ip**: $\neg R \Rightarrow \neg S$, (Contropositiva), occ. pos.$\}$

$$\underline{Q \wedge \neg S}$$

$\Rightarrow$ $\{$(Sempl-$\wedge$), occ. pos.$\}$

$$\neg S$$

2. La formula non è una tautologia. Per mostrarlo basta trovare una interpretazione che renda falsa la formula (un *controesempio*). Per esempio: $P = \mathbf{T}$, $Q = \mathbf{F}$, $R = \mathbf{T}$ e $S = \mathbf{T}$.

ESERCIZIO 3

Si dica, motivando la risposta, se il seguente passo di dimostrazione è corretto oppure no:

$$((P \Rightarrow \neg(R \wedge \neg S)) \Rightarrow \neg Q) \ \Rightarrow \ \neg R \vee S$$

$\Leftarrow$ $\{$(Sempl-$\wedge$), (Doppia Negazione)$\}$

$$((P \Rightarrow S) \Rightarrow \neg Q) \ \Rightarrow \ \neg R \vee S$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Confrontando le due formule si vede che la seconda è ottenuta dalla prima applicando dapprima la legge (Sempl-$\wedge$) istanziata come $R \wedge \neg S \Rightarrow \neg S$ e poi la doppia negazione $\neg\neg S \equiv S$. Inoltre la sottoformula $R \wedge \neg S$ occorre negativamente nella formula $((P \Rightarrow \neg(\underline{R \wedge \neg S})) \Rightarrow \neg Q) \ \Rightarrow \ \neg R \vee S$. Quindi per il *Principio di Sostituzione dell'Implicazione* il passo di dimostrazione è corretto:

$$((P \Rightarrow \neg(\underline{R \wedge \neg S})) \Rightarrow \neg Q) \ \Rightarrow \ \neg R \vee S$$

$\Leftarrow$ $\{$(Sempl-$\wedge$), (Doppia Negazione), occorrenza negativa$\}$

$$((P \Rightarrow S) \Rightarrow \neg Q) \ \Rightarrow \ \neg R \vee S$$

ESERCIZIO 4

Si consideri l'alfabeto del primo ordine con $\mathcal{C} = \{P\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{italiana, volo, =\}$, dove il simbolo di predicato *italiana* è unario mentre *volo* e $=$ sono binari. Si consideri l'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è l'insieme delle città e α è definita come segue:

- $\alpha(P) =$ "la città Parigi",

- $\alpha(italiana)(d) = \mathbf{T}$ se e solo se d è una città italiana,
- $\alpha(volo)(d, d') = \mathbf{T}$ se e solo se esiste un volo aereo diretto che parte dalla città d ed arriva alla città d'.
- $\alpha(=)(d, d') = \mathbf{T}$ se e solo se d e d' sono la stessa città.

Si formalizzi il seguente enunciato:

Ogni città italiana ha un volo aereo per Parigi con una tappa intermedia in un'altra città italiana se non ha un volo diretto per Parigi

SOLUZIONE ESERCIZIO 4
L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$\big(\forall x \,.\, italiana(x) \wedge \neg volo(x, P) \;\Rightarrow\; (\exists y.\, italiana(y) \wedge \neg(y = x) \wedge volo(y, P) \wedge volo(x, y))\big)$$

ESERCIZIO 5
Si calcoli, motivando la risposta, il valore di verità della seguente formula sull'alfabeto del primo ordine con $\mathcal{C} = \{a\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$ e $\mathcal{P} = \{P, Q\}$:

$$\phi = (\forall x \,.\, Q(x, a) \Rightarrow (\exists y \,.\, P(x, y) \wedge \neg P(y, x)))$$

nell'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D} = \{1, 2, 3\}$ ed α è definita come segue

$$\alpha(a) = 2$$
$$\alpha(Q)(z, v) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } (z, v) \in \{(1, 2), (3, 2), (1, 1)\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$$\alpha(P)(z, v) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } (z, v) \in \{(1, 2), (3, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 3)\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si calcoli cioè $\mathcal{I}_\rho(\phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ è un assegnamento arbitrario.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5
Mostriamo che la formula ϕ è *vera* nell'interpretazione data.

La formula ϕ è una **quantificazione universale**, quindi per la regola (S8) è vera se e solo se assegnando a x un *qualunque valore* d del dominio $\mathcal{D}$ la formula nella portata è vera. Formalmente abbiamo che $\mathcal{I}_\rho(\phi)$ è vera se, *per ogni valore* d tale che $d \in \mathcal{D}$, $\mathcal{I}_{\rho[d/x]}(\phi_1)$ è vera, con $\phi_1 = Q(x, a) \Rightarrow (\exists y \,.\, P(x, y) \wedge \neg P(y, x))$.

Procediamo per casi esaminando i tre possibili valori del dominio.

[$d = 1$] Dato che ϕ_1 è una **implicazione** per la regola (S6) abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\phi_1)$ è falsa se $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(Q(x, a))$ è vera e $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\phi_2)$ (dove $\phi_2 = (\exists y \,.\, P(x, y) \wedge \neg P(y, x))$) è falsa, altrimenti $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\phi_1)$ è vera. Notiamo che in questo caso abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(Q(x, a)) = \mathbf{T}$. Formalmente dalle regole (S1), (R0) e (R1):

$$\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(Q(x, a)) = \alpha(Q)(\alpha_{\rho[1/x]}(x), \alpha_{\rho[1/x]}(a)) = \alpha(Q)(1, 2) = \mathbf{T}.$$

Quindi dobbiamo considerare la conclusione dell'implicazione e calcolare il valore di verità di $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\phi_2)$. Dato che si tratta di una **quantificazione esistenziale** usiamo la regola (S9) per determinare $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\phi_2)$. Abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\phi_2)$ è vera se *esiste almeno* un valore d' tale che $d' \in \mathcal{D}$, per cui $\mathcal{I}_{\rho[1/x][d'/y]}(\phi_3)$ è vera dove $\phi_3 = P(x, y) \wedge \neg P(y, x)$. In questo caso basta prendere $d' = 2$ e otteniamo $\mathcal{I}_{\rho[1/x][2/y]}(\phi_3) = \mathbf{T}$. Formalmente dalla regola (S4) $\mathcal{I}_{\rho[1/x][2/y]}(P(x, y) \wedge \neg P(y, x)) = \mathbf{T}$ dato che sia $\mathcal{I}_{\rho[1/x][2/y]}(P(x, y)) = \mathbf{T}$ che $\mathcal{I}_{\rho[1/x][2/y]}(\neg P(y, x)) = \mathbf{T}$. Infatti dalle regole (S1) e (S3) abbiamo:

$$\mathcal{I}_{\rho[1/x][2/y]}(P(x, y)) = \alpha(P)(\alpha_{\rho[1/x][2/y]}(x), \alpha_{\rho[1/x][2/y]}(y)) = \alpha(P)(1, 2) = \mathbf{T}$$
$$\mathcal{I}_{\rho[1/x][2/y]}(P(y, x)) = \alpha(P)(\alpha_{\rho[1/x][2/y]}(y), \alpha_{\rho[1/x][2/y]}(x)) = \alpha(P)(2, 1) = \mathbf{F}.$$

[$d = 2$] Ripetendo un ragionamento analogo a quello del punto precedente abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(\phi_1)$ è falsa se $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(Q(x,a))$ è vera e $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(\phi_2)$ è falsa, altrimenti $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(\phi_1)$ è vera. In questo caso a differenza del caso precedente abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(Q(x,a)) = \mathbf{F}$. Formalmente dalle regole (S1), (R0) e (R1):

$$\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(Q(x,a)) = \alpha(Q)(\alpha_{\rho[2/x]}(x), \alpha_{\rho[2/x]}(a)) = \alpha(Q)(2,2) = \mathbf{F}.$$

[$d = 3$] Ripetendo un ragionamento analogo a quello dei punti precedenti abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\phi_1)$ è falsa se $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(Q(x,a))$ è vera e $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\phi_2)$ è falsa, altrimenti $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\phi_1)$ è vera. Notiamo che in questo caso $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(Q(x,a)) = \mathbf{T}$ dato che $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(Q(x,a)) = \alpha(Q)(3,2) = \mathbf{T}$.

Inoltre abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\phi_2)$ è vera se *esiste almeno* un valore d' tale che $d' \in \mathcal{D}$, per cui $\mathcal{I}_{\rho[3/x][d'/y]}(\phi_3)$ è vera, con $\phi_3 = P(x,y) \wedge \neg P(y,x)$. In questo caso basta prendere $d' = 1$ e otteniamo $\mathcal{I}_{\rho[3/x][1/y]}(\phi_3) = \mathbf{T}$. Formalmente dalla regola (S4) $\mathcal{I}_{\rho[3/x][1/y]}(P(x,y) \wedge \neg P(y,x)) = \mathbf{T}$ dato che sia $\mathcal{I}_{\rho[3/x][1/y]}(P(x,y)) = \mathbf{T}$ che $\mathcal{I}_{\rho[3/x][1/y]}(\neg P(y,x)) = \mathbf{T}$. Formalmente dalle regole (S1) e (S3) abbiamo:

$$\mathcal{I}_{\rho[3/x][1/y]}(P(x,y)) = \alpha(P)(\alpha_{\rho[3/x][1/y]}(x), \alpha_{\rho[3/x][1/y]}(y)) = \alpha(P)(3,1) = \mathbf{T}$$
$$\mathcal{I}_{\rho[3/x][1/y]}(P(y,x)) = \alpha(P)(\alpha_{\rho[3/x][1/y]}(y), \alpha_{\rho[3/x][1/y]}(x)) = \alpha(P)(1,3) = \mathbf{F}.$$