Logica per la Programmazione

Lezione 4

- Dimostrazione di Implicazioni Tautologiche
  - Principio di sostituzione per l'implicazione
  - Occorrenze positive e negative
  - Altre tecniche di dimostrazione
  - Forme Normali
- Insiemi funzionalmente completi di connettivi logici

Tecniche di Dimostrazione di Equivalenze

- Abbiamo visto vari esempi di dimostrazioni per sostituzione, dove ogni passo era un'equivalenza:
  - Per dimostrare che $P \equiv Q$ possiamo partire da P e arrivare a Q:

    $$P \equiv \ldots \equiv Q$$

    Oppure possiamo ridurre sia P che Q a una formula comune R:

    $$P \equiv \ldots \equiv R \qquad\qquad Q \equiv \ldots \equiv R$$

  - Per dimostrare che una formula proposizionale P (che non ha $\equiv$ come connettivo principale) è una tautologia, possiamo mostrare che è equivalente a **T**:

    $$P \equiv \ldots \equiv \mathbf{T}$$

Verso dimostrazioni con implicazioni

Vediamo che se la formula è del tipo $P \Rightarrow Q$, allora si può dimostrare anche usando una catena di equivalenze/implicazioni:

$$P \equiv \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \equiv Q$$

Introduciamo alcune leggi utili:

- Hanno un'implicazione come connettivo principale
- Usate come giustificazioni in prove di implicazioni
- *Diamo anche forma disambiguata con parentesi*

$(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$	(Modus Ponens)	$((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$
$P \wedge Q \Rightarrow P$	(Sempl.- $\wedge$)	$(P \wedge Q) \Rightarrow P$
$P \Rightarrow P \vee Q$	(Intro.- $\vee$)	$P \Rightarrow (P \vee Q)$

Correttezza di Modus Ponens e di Sempl.-$\wedge$

$P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ **(Modus Ponens)**

$\equiv$ { (Elim.-$\Rightarrow$)}

$P \wedge (\neg P \vee Q) \Rightarrow Q$

$\equiv$ { (Complemento)}

$P \wedge Q \Rightarrow Q$ **(Sempl.-** $\wedge$)

$\equiv$ { (Elim.-$\Rightarrow$)}

$\neg(P \wedge Q) \vee Q$

$\equiv$ { (De Morgan)}

$\neg P \vee \neg Q \vee Q$

$\equiv$ { (Terzo Escluso), (Zero)}

$\mathbf{T}$

Verso la Dimostrazione di Implicazioni Tautologiche

- Posso impostare la dimostrazione che $P_1 \Rightarrow P_k$

$$
\begin{array}{lll}
P_1 & & \\
\equiv & & \text{giustificazione} \\
 & \ldots & \\
\equiv & & \text{giustificazione} \\
 & P & \\
\Rightarrow & & \{P \Rightarrow Q\} \\
 & Q & \\
\equiv & & \text{giustificazione} \\
 & \ldots & \\
\equiv & & \text{giustificazione} \\
P_k & &
\end{array}
$$

Esempio - Tollendo Ponens

- Usando la legge (Sempl.-$\wedge$) $P \wedge Q \Rightarrow P$ possiamo dimostrare

$$(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q \qquad \text{(Tollendo Ponens)}$$

Partiamo dalla premessa dell'implicazione:

$$
\begin{array}{ll}
 & (P \vee Q) \wedge \neg P \\
\equiv & \quad \{ \text{(Doppia Negazione) e (Complemento)} \} \\
 & Q \ \wedge \neg P \\
\Rightarrow & \quad \{ \text{(Sempl.-}\wedge\text{)} \} \\
 & Q
\end{array}
$$

- Si noti che abbiamo applicato (Sempl.-$\wedge$) all'intera proposizione $Q \ \wedge \neg P$

Vale un Principio di Sostituzione per l'Implicazione?

- Il **principio di sostituzione per l'equivalenza** stabilisce che

"Se $P \equiv Q$, allora $R \equiv R[^Q/_P]$"

$$\boxed{\dfrac{P \equiv Q}{R \equiv R[^Q/_P]}}$$

- E valido un analogo principio di sostituzione per l'implicazione?

"Se $P \Rightarrow Q$, allora $R \Rightarrow R[^Q/_P]$" (???)

$$\boxed{\dfrac{P \Rightarrow Q}{R \Rightarrow R[^Q/_P]}} \ (???)$$

- In generale **NO**. Infatti:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & U \wedge V \Rightarrow Z \\ \Rightarrow & \qquad\qquad \{(\text{Sempl.-}\wedge)\} \\ & U \Rightarrow Z \\ & \qquad\qquad NO!! \end{array}}$$

U	V	Z	$($U$	$\wedge$	V	$\Rightarrow$	$Z)$	$\Rightarrow$	$(U$	$\Rightarrow$	$Z)$
1	0	0	1	0	0	1	0	**0**	1	0	0
			(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	**(4)**	(1)	(2)	(1)

Analogia con Disuguaglianze Algebriche

- Situazione analoga con disuguaglianze algebriche
- Quali delle seguenti deduzioni sono corrette?

$$\begin{array}{ll} & a - c \\ \leq & \qquad\qquad \{a \leq b\} \\ & b - c \end{array}$$

OK

$$\begin{array}{ll} & a - c \\ \leq & \qquad\qquad \{c \leq d\} \\ & a - d \end{array}$$

NO!!!

$$\begin{array}{ll} & a - c \\ \geq & \qquad\qquad \{c \leq d\} \\ & a - d \end{array}$$

OK

- Si noti che **a** compare *positivamente* in **(a - c)**, ma **c** vi compare *negativamente*. Per questo nel secondo caso il segno di disuguaglianza va invertito.

Occorrenze Positive e Negative

- Definizione: la formula proposizionale P **occorre positivamente in**

$$P \qquad P \vee Q \qquad P \wedge Q \qquad Q \Rightarrow P$$

- mentre P **occorre negativamente in**

$$\neg P$$
$$P \Rightarrow Q \qquad \text{(si ricordi che } P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q\text{)}$$

- Se P compare in una formula R a livello più profondo, si contano le occorrenze negative da P fino alla radice di R:
  - se sono pari, allora P **occorre positivamente in** R
  - se sono dispari, allora P **occorre negativamente in** R
- Attenzione: se P compare più volte in R, bisogna considerare separatamente le occorrenze: ognuna di esse può essere positiva o negativa indipendentemente dalle altre

Esempi

Come occorre P in $P \Rightarrow ((\neg P) \Rightarrow Q)$?

Sottolineamo le occorrenze negative: $\underline{P} \Rightarrow (\underline{(\underline{\neg P})} \Rightarrow Q)$

La prima occorrenza di P compare negativamente, mentre la seconda compare positivamente. L'unica occorrenza di Q compare invece positivamente. Notare che la proposizione analizzata è infatti equivalente a

$$\neg P \vee (P \vee Q)$$

Come occorrono P e Q in $(P \Rightarrow (\neg P)) \Rightarrow Q$?

$$(\underline{\underline{P} \Rightarrow (\underline{\neg P})}) \Rightarrow Q$$

Sia le due occorrenze di P, che l'unica occorrenza di Q compaiono positivamente. Notare che la proposizione analizzata è infatti equivalente a

$$(P \wedge P) \vee Q$$

Occorrenze Positive e Negative: Esempi

- Come occorre P nelle seguenti proposizioni?
  - $(P \wedge P \wedge R) \vee S$
  - $Q \Rightarrow \neg(P \wedge R)$
  - $(\neg P \vee Q \Rightarrow R) \Rightarrow S$
  - $\neg P \vee Q \Rightarrow (R \Rightarrow S)$
  - $P \wedge Q \Rightarrow P \vee Q$
- Se ci sono più occorrenze di P, indicheremo esplicitamente quale ci interessa.
  - $\color{red}{P} \Rightarrow (Q \vee P \Rightarrow Q \vee \neg S)$
  - $p \Rightarrow (Q \vee \color{red}{P} \Rightarrow Q \vee \neg S)$

Principio di Sostituzione per l'Implicazione

Possiamo ora enunciare in modo corretto il **Principio di Sostituzione dell'Implicazione** che prevede due casi

- Se abbiamo stabilito che
  - $P \Rightarrow Q$
  - P occorre **positivamente** in R

  allora vale
  $$R \Rightarrow R[^{Q}/_{P}]$$

$$\frac{P \Rightarrow Q, \quad P \text{ occorre positivamente in } R}{R \Rightarrow R[^{Q}/_{P}]}$$

- Se abbiamo stabilito che
  - $P \Rightarrow Q$
  - P occorre **negativamente** in R

  allora vale
  $$R \Leftarrow R[^{Q}/_{P}]$$

$$\frac{P \Rightarrow Q, \quad P \text{ occorre negativamente in } R}{R \Leftarrow R[^{Q}/_{P}]}$$

Dimostrazione di Implicazioni: esempi

- $(P \Rightarrow Q \wedge R) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$, usando $A \wedge B \Rightarrow A$ (Sempl.-$\wedge$)

$$\begin{array}{ll} & P \Rightarrow Q \wedge R \\ \Rightarrow & \qquad\qquad \{\text{(Sempl.-}\wedge\text{) e } Q \wedge R \text{ occorre posit.}\} \\ & P \Rightarrow Q \end{array}$$

- $(P \vee Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
  Partiamo dalla conseguenza, usando $A \Rightarrow A \vee B$ (Intro.-$\vee$)

$$\begin{array}{ll} & (P \Rightarrow R) \\ \Leftarrow & \qquad\qquad \{\text{(Intro.-}\vee\text{) e } P \text{ occorre negat.}\} \\ & P \vee Q \Rightarrow R \end{array}$$

Forme Normali

- Usando le leggi ogni proposizione può essere trasformata in una *forma normale*. Si considerano due tipi:
  - Forma normale **congiuntiva**

$$(P_1 \vee P_2 \vee \ldots) \wedge (Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots) \wedge \ldots$$

  - Forma normale **disgiuntiva**

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots) \vee (Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots) \vee \ldots$$

  dove $P_1, P_2, \ldots, Q_1, Q_2, \ldots$ sono variabili proposizionali, *eventualmente negate*

- Utili per dimostrare equivalenza di formule, riducendole in forma normale e verificando se sono equivalenti
- Spesso ridurre a forma normale aumenta la dimensione della formula, perché bisogna usare distributività

Il Principio di Risoluzione

- $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R)$ (Risoluzione)
- Questa legge permette di semplificare una formula in **forma normale congiuntiva**. È il meccanismo di calcolo alla base della **programmazione logica**.

$$
\begin{array}{lll}
 & (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) & \\
\equiv & & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow),\ 2\ \text{volte}\} \\
 & (\neg Q \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow R) & \\
\Rightarrow & & \{(\text{Transitività-}\Rightarrow)\} \\
 & \neg Q \Rightarrow R & \\
\equiv & & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\
 & Q \vee R &
\end{array}
$$

- Quindi la risoluzione corrisponde alla transitività dell'implicazione

Altre dimostrazioni del Principio di Risoluzione

Vediamo una dimostrazione standard del Principio di Risoluzione, in cui partiamo dalla premessa e la semplifichiamo fino ad arrivare alla conseguenza.

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R) \text{ (Risoluzione)}$$

Partiamo quindi dalla premessa:

$$\begin{array}{ll}
 & (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \\
\equiv & \quad \{(\text{Distributività}\} \\
 & ((P \vee Q) \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge R) \\
\equiv & \quad \{(\text{Complemento})\} \\
 & (Q \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge R) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{Sempl-}\wedge), (Q \wedge \neg P) \text{ occorre positivamente}\} \\
 & Q \vee ((P \vee Q) \wedge R) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{Sempl-}\wedge), ((P \vee Q) \wedge R) \text{ occorre positivamente}\} \\
 & Q \vee R
\end{array}$$

Altre dimostrazioni del Principio di Risoluzione

Ora dimostriamo la stessa formula riducendola a **T**, usando gli stessi passaggi della dimostrazione precedente. Si noti il verso delle implicazioni.

$$
\begin{array}{ll}
 & (P \lor Q) \land (\neg P \lor R) \Rightarrow (Q \lor R) \qquad \equiv PR \\
\equiv & \quad \{(\text{Distributività}\} \\
 & ((P \lor Q) \land \neg P) \lor ((P \lor Q) \land R) \Rightarrow (Q \lor R) \\
\equiv & \quad \{(\text{Complemento})\} \\
 & (Q \land \neg P) \lor ((P \lor Q) \land R) \Rightarrow (Q \lor R) \\
\Leftarrow & \quad \{(\text{Sempl-}\land), (Q \land \neg P) \text{ occorre negativamente}\} \\
 & Q \lor ((P \lor Q) \land R) \Rightarrow (Q \lor R) \\
\Leftarrow & \quad \{(\text{Sempl-}\land), ((P \lor Q) \land R) \text{ occorre negativamente}\} \\
 & Q \lor R \Rightarrow (Q \lor R) \\
\equiv & \quad \{(\text{Riflessività-}\Rightarrow)\} \\
 & \mathbf{T}
\end{array}
$$

Si noti che abbiamo dimostrato che $\mathbf{T} \Rightarrow PR$. Poichè $PR \Rightarrow \mathbf{T}$ è banalmente vero, questo è sufficiente per mostrare che PR è una tautologia.

Insiemi Funzionalmente Completi di Connettivi Logici

- Abbiamo introdotto 6 diversi connettivi logici:

Connettivo	Forma simbolica	Operazione corrispondente
not	$\neg p$	*negazione*
and, *e*	$p \wedge q$	*congiunzione*
or, *o*	$p \vee q$	*disgiunzione*
se p allora q	$p \Rightarrow q$	*implicazione*
p se e solo se q	$p \equiv q$	*equivalenza*
p se q	$p \Leftarrow q$	*conseguenza*

- Alcuni possono essere definiti in termini di altri.
- Molti sottoinsiemi sono "funzionalmente completi" cioè permettono di derivare tutti gli altri.
- Vediamo che $\{\wedge, \neg\}$ è funzionalmente completo.
- Esercizio: dimostrare che anche $\{\vee, \neg\}$ e $\{\Rightarrow, \neg\}$ sono funzionalmente completi.

L'Insieme $\{\wedge, \neg\}$ è funzionalmente completo

- Occorre mostrare che una qualunque formula proposizionale è equivalente a una formula che contiene solo $\{\wedge, \neg\}$.
- Per induzione strutturale sulla sintassi delle formule
  - Ricordiamo la sintassi:

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
\langle Prop \rangle & ::= & \langle Prop \rangle \equiv \langle Prop \rangle \mid \langle Prop \rangle \wedge \langle Prop \rangle \mid \\
 & & \langle Prop \rangle \vee \langle Prop \rangle \mid \langle Prop \rangle \Rightarrow \langle Prop \rangle \mid \\
 & & \langle Prop \rangle \Leftarrow \langle Prop \rangle \mid \langle Atom \rangle \mid \neg \langle Atom \rangle \\
\langle Atom \rangle & ::= & \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \langle Ide \rangle \mid (\langle Prop \rangle) \\
\langle Ide \rangle & ::= & p \mid q \mid \ldots \mid P \mid Q \mid \ldots
\end{array}}$$

  - implicazione ($\Rightarrow$), conseguenza ($\Leftarrow$) ed equivalenza ($\equiv$): facile!
  - disgiunzione:

$$\begin{array}{ll}
 & p \vee q \\
\equiv & \qquad\qquad \{(\text{Doppia Neg.})\} \\
 & \neg\neg(p \vee q) \\
\equiv & \qquad\qquad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & \neg(\neg p \wedge \neg q)
\end{array}$$

Il Connettivo "NAND"

- Si consideri il connettivo proposizionale binario **nand** la cui semantica è definita dalla seguente tabella di verità:

P	Q	P **nand** Q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Esercizio: si provi che l'insieme $\{$**nand**$\}$ è **funzionalmente completo**.