

# Logica per la Programmazione

## Lezione 6

- ▶ Logica del Primo Ordine
  - ▶ Motivazioni
  - ▶ Sintassi di Termini e Formule
  - ▶ Formule aperte e chiuse

## Limiti del Calcolo Proporzionale

- ▶ Nella formalizzazione di enunciati dichiarativi, gli **enunciati atomici** non hanno struttura (sono rappresentati da variabili proposizionali)
- ▶ **Es: “Alberto va al cinema con Bruno o va al teatro con Carlo”**  
Introduciamo 4 proposizioni atomiche:
  - ▶  $AC \equiv$  Alberto va al cinema
  - ▶  $BC \equiv$  Bruno va al cinema
  - ▶  $AT \equiv$  Alberto va al teatro
  - ▶  $CT \equiv$  Carlo va al teatro
- ▶ Formula proposizionale:  $(AC \wedge BC) \vee (AT \wedge CT)$
- ▶ Tuttavia, “Alberto”, “Bruno”, ... “cinema” ..., gli individui del nostro discorso e le relazioni tra di essi (“andare al”) scompaiono...

## Limiti del Calcolo Proposizionale (2)

Le formule proposizionali possono descrivere **relazioni logiche tra un numero finito di enunciati**, ma

- ▶ Vorremmo esprimere proprietà di un' **infinità di individui**:
  - ▶ “tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi”  
In CP(?) (“4 non è primo”)  $\wedge$  (“6 non è primo”)  $\wedge$  ... **NO!**
  - ▶ “esiste almeno un numero naturale maggiore di due che non è primo”  
In CP(?) (“3 non è primo”)  $\vee$  (“4 non è primo”)  $\vee$  ... **NO!**
- ▶ Vorremmo poter esprimere **proprietà “generalì”** come  
“se  $x$  è pari allora  $x+1$  è dispari”  
... e riconoscere che da esse derivano proprietà specifiche come  
“se 4 è pari allora 5 è dispari”

## Limiti del Calcolo Proposizionale (3)

Anche se descriviamo **proprietà di un numero finito di enunciati** vorremmo descriverli in maniera **compatta**

- ▶ **“tutti gli studenti di LPP vanno al cinema”**

In CP(?)  $S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \dots \wedge S_{150}$

- ▶ **“tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema”**

In CP(?)

$$(\neg S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \dots \wedge S_{150}) \vee$$

$$(S_1 \wedge \neg S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \dots \wedge S_{150}) \vee$$

$$(S_1 \wedge S_2 \wedge \neg S_3 \wedge S_4 \dots \wedge S_{150}) \vee$$

$$(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge \neg S_4 \dots \wedge S_{150}) \vee$$

...

$$(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \dots \wedge \neg S_{150})$$

## Verso la Logica del Primo Ordine

- ▶ La **Logica del Primo Ordine** (LPO) estende (include) il **Calcolo Proporzionale**
- ▶ Con le formule di LPO
  - ▶ si possono denotare/rappresentare esplicitamente gli elementi del **dominio di interesse** (gli individui, usando i **termini**)
  - ▶ si possono esprimere **proprietà** di individui e **relazioni** tra due o più individui (usando i **predicati**)
  - ▶ si può **quantificare** una formula, dicendo che vale **per almeno** un individuo, o **per tutti** gli individui (usando i **quantificatori**)

# La Logica del Primo Ordine

- ▶ Presenteremo **Sintassi**, **Semantica** e **Sistema di Dimostrazioni**
- ▶ Useremo **formule** della LPO per formalizzare enunciati dichiarativi
- ▶ La **semantica** di una formula di LPO è sempre un valore booleano assegnato in base ad una **interpretazione**, come per il Calcolo Proposizionale, ma determinato in modo molto più complesso. . .
- ▶ Come per il Calcolo Proposizionale, ci interessano le formule che sono “sempre vere” (**formule valide** analoghe alle **tautologie**)
- ▶ **Non esistono tabelle di verità**: per vedere se una formula è valida occorre dimostrarlo (e non sempre è possibile trovare una dimostrazione)

## Espressività della Logica del Primo Ordine

Esempi (li analizzeremo meglio in seguito):

- ▶ Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi:

$$(\forall x. \text{pari}(x) \wedge x > 2 \Rightarrow \neg \text{primo}(x))$$

- ▶ Esiste almeno un numero naturale maggiore di due che non è primo

$$(\exists x. x > 2 \wedge \neg \text{primo}(x))$$

- ▶ Se  $x$  è pari allora  $x+1$  è dispari (\*)  $(\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(x + 1))$
- ▶ (\*) implica “se 4 è pari allora 5 è dispari”

$$(\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(x + 1)) \Rightarrow (\text{pari}(4) \Rightarrow \text{dispari}(5))$$

## Espressività della Logica del Primo Ordine (2)

- ▶ Tutti gli studenti di LPP vanno al cinema:

$$(\forall x. \text{studente}(x) \wedge \text{frequenta}(x, LPP) \Rightarrow \text{vaAlCinema}(x))$$

- ▶ Tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema:

$$(\exists x. \text{studente}(x) \wedge \text{frequenta}(x, LPP) \wedge \neg \text{vaAlCinema}(x) \wedge$$

$$(\forall y. \text{studente}(y) \wedge \text{frequenta}(y, LPP) \wedge \neg(y = x) \Rightarrow \text{vaAlCinema}(y)))$$



## Logica del Primo Ordine: commenti

Nella Logica del Primo Ordine ci sono due categorie **sintattiche** e **semantiche** differenti

- ▶ i **termini** che sono passati come argomenti dei predicati e denotano **elementi del dominio di riferimento**
- ▶ le **formule** costruite a partire dai predicati e che assumono valore booleano

# La Sintassi della Logica del Primo Ordine: l'Alfabeto

Un **alfabeto** del primo ordine comprende:

- ▶ Un insieme  $\mathcal{V}$  di simboli di **variabile**
- ▶ Un insieme  $\mathcal{C}$  di simboli di **costante**
- ▶ Un insieme  $\mathcal{F}$  di simboli di **funzione**, ognuno con la sua **arietà** (o **numero di argomenti**)
- ▶ Un insieme  $\mathcal{P}$  di simboli di **predicato**, ognuno con la sua **arietà** (eventualmente 0)
- ▶ I simboli  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv, \Leftarrow$  (**connettivi logici**)
- ▶ I simboli  $\forall, \exists$  (**quantificatori**)
- ▶ I simboli  $( )$  [parentesi] , [virgola] . [punto]

# La Sintassi della Logica del Primo Ordine: la Grammatica

Estende la grammatica del **Calcolo Proporzionale** con **nuove produzioni**

$$\begin{aligned}
 Fbf & ::= \\
 & Fbf \equiv Fbf \mid Fbf \wedge Fbf \mid Fbf \vee Fbf \mid \\
 & Fbf \Rightarrow Fbf \mid Fbf \Leftarrow Fbf \\
 & Atom \mid \neg Atom \\
 Atom & ::= \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid Pred \mid (Fbf) \mid (FbfQuant) \\
 FbfQuant & ::= (\forall Var.Fbf) \mid (\exists Var.Fbf) \\
 Pred & ::= Plde \mid Plde(Term\{, Term\}) \\
 Term & ::= Const \mid Var \mid Flde(Term\{, Term\})
 \end{aligned}$$

dove

- ▶  $Var \in \mathcal{V}$  è un simbolo di **variabile**,
- ▶  $Const \in \mathcal{C}$  è un simbolo di **costante**,
- ▶  $Flde \in \mathcal{F}$  è un simbolo di **funzione**, e
- ▶  $Plde \in \mathcal{P}$  è un simbolo di **predicato**.

## Sintassi della Logica del Primo Ordine: i Termini

I **termini** denotano “elementi del dominio di interesse” (“individui”). Sono definiti dalla categoria sintattica *Term*:

$$Term ::= Const \mid Var \mid Flde(Term\{, Term\})$$

- ▶ Quindi i termini sono definiti **induttivamente**, a partire da un alfabeto  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{P}$ , nel modo seguente:
  - ▶ Ogni **costante**  $c \in \mathcal{C}$  è un termine
  - ▶ Ogni **variabile**  $x \in \mathcal{V}$  è un termine
  - ▶ Se  $f \in \mathcal{F}$  è un **simbolo di funzione** con arietà  $n$  e  $t_1, \dots, t_n$  sono termini, allora  $f(t_1, \dots, t_n)$  è un termine

## Termini: Esempi

- ▶  $a$ , con  $a \in \mathcal{C}$
- ▶  $x$ , con  $x \in \mathcal{V}$
- ▶  $g(a)$ , con  $g \in \mathcal{F}$  di arietà 1
- ▶  $f(x, g(a))$ , con  $f \in \mathcal{F}$  di arietà 2
- ▶ **Notazione**: I ben noti simboli di funzione binari a volte sono rappresentati con notazione **infissa**.
- ▶ **Esempio**:  $x + (1 * z)$ , è un termine con  $+, * \in \mathcal{F}$  con arietà 2

## Sintassi della Logica del Primo Ordine: le Formule (1)

Le **formule** rappresentano enunciati dichiarativi. Sono definite **induttivamente** come segue, fissato un alfabeto  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{P}$ :

- ▶ Se  $p \in \mathcal{P}$  è un **simbolo di predicato** allora
  - ▶ se ha arietà 0 allora  $p$  è una **formula**. Corrisponde a una **variabile proposizionale** nel CP, e lo scriviamo  $p$  invece di  $p()$
  - ▶ se ha arietà  $n > 0$  e  $t_1, \dots, t_n$  sono **termini** allora  $p(t_1, \dots, t_n)$  è una **formula**.

Queste sono le formule corrispondenti alla categoria sintattica *Pred*:

$$Pred := Plde \mid Plde(Term\{, Term\})$$

- ▶ A volte usiamo **notazione infissa** per simboli di arietà 2.
- ▶ Esempio:  $x=y$  o  $z \leq f(x)$  con  $=, \leq, \in \mathcal{P}$  con arietà 2

## Sintassi della Logica del Primo Ordine: le Formule (2)

Le rimanenti categorie sintattiche sono

$$\begin{aligned}
 Fbf & ::= \\
 & Fbf \equiv Fbf \mid Fbf \wedge Fbf \mid Fbf \vee Fbf \mid \\
 & Fbf \Rightarrow Fbf \mid Fbf \Leftarrow Fbf \\
 & Atom \mid \neg Atom \\
 Atom & ::= \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid Pred \mid (Fbf) \mid (FbfQuant) \\
 FbfQuant & ::= (\forall Var.Fbf) \mid (\exists Var.Fbf)
 \end{aligned}$$

e definiscono le formule induttivamente come segue

- ▶ **T** e **F** sono formule
- ▶ Se  $P$  è una formula allora  $\neg P$  è una formula
- ▶ Se  $P$  e  $Q$  sono formule allora  $P \wedge Q, P \vee Q, P \Rightarrow Q, P \equiv Q, P \Leftarrow Q$  sono formule
- ▶ Se  $P$  è una formula e  $x \in \mathcal{V}$ , allora  $(\forall x.P)$  e  $(\exists x.P)$
- ▶ Se  $P$  è una formula allora anche  $(P)$  è una formula

## Sintassi delle Formule: Esempi

- ▶ Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi

$$(\forall x. \text{pari}(x) \wedge x > 2 \Rightarrow \neg \text{primo}(x))$$

- ▶ Se  $x$  è pari allora il successore di  $x$  è dispari

$$(\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(x+1))$$

- ▶ Se  $x$  è pari allora  $x + 1$  è dispari” implica “se 4 è pari allora 5 è dispari

$$(\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(x+1) \Rightarrow (\text{pari}(4) \Rightarrow \text{dispari}(5)))$$

Simboli di Variabile? Simboli di Predicato? Simboli di Funzione? Simboli di Costante?



## Occorrenze di Variabili Libere o Legate

- ▶ In una formula quantificata come  $(\forall x.P)$  o  $(\exists y.P)$  la sottoformula  $P$  è detta la **portata** del quantificatore.
- ▶ Una occorrenza di variabile  $x$  è **legata** se compare nella portata di un quantificatore altrimenti è detta **libera**.
- ▶ **Esempio:**

$$(\forall y.z = y \wedge (x = y \vee (\exists x.x = z \vee z = y)))$$

- ▶ Portata di  $\forall y$ ?
- ▶ Portata di  $\exists x$ ?
- ▶ Occorrenze di variabili **legate**?
- ▶ Occorrenze di variabili **libere**?

## Formule Aperte e Chiuse

- ▶ Il nome di una variabile legata può essere cambiato grazie alle leggi di **ridenominazione**:

$$(\forall x.P) \equiv (\forall y.P[y/x]) \quad \text{se } y \text{ non compare in } P \quad (\text{Ridenom.})$$

$$(\exists x.P) \equiv (\exists y.P[y/x]) \quad \text{se } y \text{ non compare in } P \quad (\text{Ridenom.})$$

**Attenzione:** qui  $P[y/x]$  rappresenta la formula  $P$  in cui TUTTE le occorrenze di  $x$  sono sostituite da  $y$

- ▶ Una formula che contiene occorrenze di variabili libere è detta **aperta**
- ▶ Spesso scriveremo  $P(x)$  per indicare che  $x$  è libera nella formula  $P$
- ▶ Una formula senza variabili libere è detta **chiusa**. Considereremo principalmente **formule chiuse**.