

# Logica per la Programmazione

## Lezione 7

- ▶ Semantica della Logica del Primo Ordine
  - ▶ Interpretazioni
  - ▶ Formalizzazione
  - ▶ Un esempio informale di semantica
  - ▶ Semantica dei termini
  - ▶ Semantica delle formule
  - ▶ Esempi

## Interpretazione e Semantica

- ▶ Come in Calcolo Proporzionale la semantica di una **formula chiusa** di LPO si determina rispetto ad una **interpretazione**
- ▶ Una **interpretazione** assegna la semantica ad una formula chiusa fissando il significato dei simboli che compaiono:
  - ▶ Il **dominio** di interesse (un insieme)
  - ▶ A quali **elementi** del dominio corrispondono i **simboli di costante** in  $\mathcal{C}$
  - ▶ A quali **funzioni** sul dominio corrispondono i **simboli di funzione** in  $\mathcal{F}$
  - ▶ A quali **proprietà** o **relazioni** corrispondono i **simboli di predicato** in  $\mathcal{P}$
- ▶ Componendo i valori delle formule atomiche nelle formule composte si arriva a stabilire il valore di verità della formula complessiva
- ▶ Procedimento simile a quello del calcolo proposizionale, ma reso più complesso dalla necessità di calcolare funzioni e predicati, e dalla presenza dei quantificatori

## Esempio: Semantica di Formula dipende da Interpretazione

- ▶ Consideriamo la formula chiusa:

$$(\forall x.p(x) \vee q(x))$$

- ▶ **Intepretazione 1:**

- ▶ Il **dominio** è quello degli esseri **umani**
- ▶ Il predicato  $p$  significa “essere maschio”
- ▶ Il predicato  $q$  significa “essere femmina”

La formula è vera

- ▶ **Intepretazione 2:**

- ▶ Il **dominio** è quello dei **numeri naturali**
- ▶ Il predicato  $p$  significa “essere numero primo”
- ▶ Il predicato  $q$  significa “essere numero pari”

La formula è falsa

## Interpretazione: Definizione Formale

Dato un linguaggio del primo ordine, ovvero fissato un alfabeto  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{P}$ , una **intepretazione**  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$  è costituita da:

- ▶ Un insieme  $\mathcal{D}$ , detto **dominio dell'intepretazione**
- ▶ Una **funzione di interpretazione**  $\alpha$  che associa:
  - ▶ ad ogni **costante**  $c \in \mathcal{C}$  del linguaggio un **elemento** del dominio  $\mathcal{D}$ , rappresentato da  $\alpha(c)$
  - ▶ ad ogni **simbolo di funzione**  $f \in \mathcal{F}$  di arietà  $n$  una funzione  $\alpha(f)$  che data una  $n$ -upla di elementi di  $\mathcal{D}$  restituisce un elemento di  $\mathcal{D}$ . Ovvero

$$\alpha(f) : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$$

- ▶ ad ogni **simbolo di predicato**  $p \in \mathcal{P}$  di arietà zero (un simbolo proposizionale) un **valore di verità** indicato da  $\alpha(p)$
- ▶ ad ogni **simbolo di predicato**  $p \in \mathcal{P}$  di arietà  $n$  (un **predicato  $n$ -ario**), una funzione  $\alpha(p)$  che data una  $n$ -upla di elementi di  $\mathcal{D}$  restituisce un valore di verità. Ovvero

$$\alpha(p) : \mathcal{D}^n \rightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

# Formalizzazione di Enunciati: Linee Guida (1)

- ▶ Finora abbiamo associato un valore di verità alle formule in modo informale: vedremo in seguito la **definizione formale della semantica**
- ▶ Per formalizzare un enunciato **E** dobbiamo fornire:
  - ▶ un **alfabeto**  $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{V})$  e un'interpretazione  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$
  - ▶ una **formula** del primo ordine che, per l'interpretazione  $\mathcal{I}$ , sia vera se e solo se l'enunciato **E** è vero

## Formalizzazione di Enunciati: Linee Guida (2)

Dato un enunciato **E**, per identificare l'alfabeto  $\mathcal{A}$  e l'interpretazione  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$

- ▶ individuiamo il **dominio**  $\mathcal{D}$  di cui parla l'enunciato
- ▶ per ogni individuo  $d \in \mathcal{D}$  menzionato in **E**, introduciamo un simbolo di **costante**  $c \in \mathcal{C}$  e fissiamo  $\alpha(c) = d$
- ▶ per ogni operatore **op** menzionato in **E** che applicato a elementi di  $\mathcal{D}$  restituisce un individuo di  $\mathcal{D}$ , introduciamo un simbolo di **funzione**  $f \in \mathcal{F}$  e fissiamo  $\alpha(f) = \mathbf{op}$
- ▶ per ogni proprietà di individui o relazione tra individui **R** menzionata in **E**, introduciamo un simbolo di **predicato**  $p \in \mathcal{P}$  e fissiamo  $\alpha(p) = \mathbf{R}$

## Formalizzazione di Enunciati: Esempio

“Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi”

- ▶ Dominio: numeri naturali:  $\mathbb{N}$
- ▶ Elementi del dominio menzionati: “due”
  - ▶ Introduciamo la costante  $\mathbf{2} \in \mathcal{C}$  con  $\alpha(\mathbf{2}) = \underline{2} \in \mathbb{N}$
- ▶ Proprietà o relazioni tra naturali menzionate:
  - ▶ “ $n$  è pari”: introduciamo  $\mathbf{pari} \in \mathcal{P}$  con arietà 1 e  $\alpha(\mathbf{pari})(n) = \mathbf{T}$  se  $n \in \mathbb{N}$  è pari,  $\mathbf{F}$  altrimenti
  - ▶ “ $n$  è primo”: introduciamo  $\mathbf{primo} \in \mathcal{P}$  con arietà 1 e  $\alpha(\mathbf{primo})(n) = \mathbf{T}$  se  $n \in \mathbb{N}$  è primo,  $\mathbf{F}$  altrimenti
  - ▶ “ $n$  è maggiore di  $m$ ”: introduciamo  $\mathbf{>} \in \mathcal{P}$  con arietà 2 e  $\alpha(\mathbf{>})(n, m) = \mathbf{T}$  se  $n$  è maggiore di  $m$ ,  $\mathbf{F}$  altrimenti
- ▶ Formula:

$$(\forall x. \mathbf{pari}(x) \wedge x > \mathbf{2} \Rightarrow \neg \mathbf{primo}(x))$$

## Formalizzazione di Enunciati: Esempi

- ▶ **Alberto** non segue LPP ma va al cinema con **Bruno** o con **Carlo**
- ▶ Tutti gli studenti di LPP vanno al cinema
- ▶ Tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema



## Alfabeto ed Interpretazione

**Alberto** non segue LPP ma va al cinema con **Bruno** o con **Carlo**

- ▶ Dominio: l'insieme delle persone
- ▶ **Costanti**: le persone **Alberto**, **Bruno** e **Carlo**. Introduciamo le costanti  $A, B, C \in \mathcal{C}$  tali che  $\alpha(A)$  = "la persona Alberto",  $\alpha(B)$  = "la persona Bruno" e  $\alpha(C)$  = "la persona Carlo"
- ▶ Operatori sul dominio menzionati: nessun simbolo di funzione
- ▶ Proprietà o relazioni tra persone:
  - ▶ introduciamo un simbolo di predicato  $vaCinema \in \mathcal{P}$  con arietà 1 e  $\alpha(vaCinema)(d) = \mathbf{T}$  se  $d$  va al cinema,  $\mathbf{F}$  altrimenti
  - ▶ introduciamo un simbolo di predicato  $segueLPP \in \mathcal{P}$  con arietà 1 e  $\alpha(segueLPP)(d) = \mathbf{T}$  se  $d$  segue LPP,  $\mathbf{F}$  altrimenti
  - ▶ introduciamo un simbolo di predicato  $= \in \mathcal{P}$  con arietà 2 con il significato standard

## Formalizzazione di Enunciati: Formule

- ▶ **Alberto** non segue LPP ma va al cinema con **Bruno** o con **Carlo**:

$$\neg \text{segueLPP}(A) \wedge (\text{vaCinema}(A) \wedge (\text{vaCinema}(B) \vee \text{vaCinema}(C)))$$

- ▶ **Tutti** gli studenti di LPP vanno al cinema:

$$(\forall x. \text{segueLPP}(x) \Rightarrow \text{vaCinema}(x))$$

- ▶ **Tutti** gli studenti di LPP **tranne uno** vanno al cinema:

$$(\exists x. \text{segueLPP}(x) \wedge \neg \text{vaCinema}(x)) \wedge \\ (\forall y. \text{segueLPP}(y) \wedge \neg (x = y) \Rightarrow \text{vaCinema}(y))$$

## Formalizzazione di Enunciati: Esercizio (1)

Formalizzare l'enunciato: "Due persone sono parenti se hanno un antenato in comune"

- ▶ **Dominio:** l'insieme delle persone
- ▶ Costanti, operatori sul dominio menzionati: nessuno
- ▶ Proprietà o relazioni tra persone:
  - ▶ "d<sub>1</sub> e d<sub>2</sub> sono parenti": introduciamo *parenti* ∈  $\mathcal{P}$  con arietà 2 e  $\alpha(\textit{parenti})(d_1, d_2) = \mathbf{T}$  se d<sub>1</sub> e d<sub>2</sub> sono parenti, **F** altrimenti
  - ▶ "d<sub>1</sub> è antenato di d<sub>2</sub>": introduciamo *antenato* ∈  $\mathcal{P}$  con arietà 2 e  $\alpha(\textit{antenato})(d_1, d_2) = \mathbf{T}$  se d<sub>1</sub> è antenato di d<sub>2</sub>, **F** altrimenti
- ▶ Formula:

$$(\forall x. (\forall y. (\exists z. \textit{antenato}(z, x) \wedge \textit{antenato}(z, y)) \Rightarrow \textit{parenti}(x, y)))$$

## Formalizzazione di Enunciati: Esercizio (1)

“Se un numero naturale è pari allora il suo successore è dispari”

- ▶ Dominio: numeri naturali:  $\mathbb{N}$
- ▶ Operatori sul dominio menzionati: “successore”
  - ▶ Introduciamo il simbolo **succ**  $\in \mathcal{F}$  con arietà 1 e  $\alpha(\mathbf{succ})(n) = n + 1$
- ▶ Proprietà o relazioni tra naturali menzionate:
  - ▶ “ $n$  è pari”: introduciamo **pari**  $\in \mathcal{P}$  come prima
  - ▶ “ $n$  è dispari”: introduciamo **dispari**  $\in \mathcal{P}$  con arietà 1 e  $\alpha(\mathbf{dispari})(n) = \mathbf{T}$  se  $n \in \mathbb{N}$  è dispari, **F** altrimenti
- ▶ Formula:

$$(\forall x. \mathbf{pari}(x) \Rightarrow \mathbf{dispari}(\mathbf{succ}(x)))$$

## Interpretazione: Richiamo

Dato un alfabeto  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{P}$ , una **intepretazione**  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$  è costituita da:

- ▶ Un insieme  $\mathcal{D}$ , detto **dominio dell'intepretazione**
- ▶ Una **funzione di interpretazione**  $\alpha$  che associa:
  - ▶ ad ogni **costante**  $c \in \mathcal{C}$  del linguaggio un **elemento** del dominio  $\mathcal{D}$ , rappresentato da  $\alpha(c)$
  - ▶ ad ogni **simbolo di funzione**  $f \in \mathcal{F}$  di arietà  $n$  una funzione  $\alpha(f)$  che data una  $n$ -upla di elementi di  $\mathcal{D}$  restituisce un elemento di  $\mathcal{D}$ . Ovvero

$$\alpha(f) : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$$

- ▶ ad ogni **simbolo di predicato**  $p \in \mathcal{P}$  di arietà zero (un simbolo proposizionale) un **valore di verità** indicato da  $\alpha(p)$
- ▶ ad ogni **simbolo di predicato**  $p \in \mathcal{P}$  di arietà  $n$  (un **predicato  $n$ -ario**), una funzione  $\alpha(p)$  che data una  $n$ -upla di elementi di  $\mathcal{D}$  restituisce un valore di verità. Ovvero

$$\alpha(p) : \mathcal{D}^n \rightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

## Esempio di Semantica: Alfabeto e Interpretazioni

Sia dato l'alfabeto:  $\mathcal{C} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$   $\mathcal{F} = \{\}$   $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}(-)\}$   $\mathcal{V} = \{x, y\}$

Consideriamo le seguenti interpretazioni:

- ▶ Interpretazione  $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{D}_1, \alpha_1)$ 
  - ▶ **Dominio:** le città italiane  $[\mathcal{D}_1 = \{c \mid c \text{ è una città italiana} \}]$
  - ▶  $\alpha_1(\mathbf{a}) = \mathbf{Milano}$ ,  $\alpha_1(\mathbf{b}) = \mathbf{Roma}$ ,  $\alpha_1(\mathbf{c}) = \mathbf{Pontedera}$
  - ▶  $\alpha_1(\mathbf{p})(x) = \mathbf{T}$  se  $x$  è capoluogo di provincia,  $\mathbf{F}$  altrimenti
  
- ▶ Interpretazione  $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{D}_2, \alpha_2)$ 
  - ▶ **Dominio:** l'insieme di numeri naturali  $\{\mathbf{5}, \mathbf{10}, \mathbf{15}\}$   $[\mathcal{D}_2 = \{\mathbf{5}, \mathbf{10}, \mathbf{15}\}]$
  - ▶  $\alpha_2(\mathbf{a}) = \mathbf{5}$ ,  $\alpha_2(\mathbf{b}) = \mathbf{10}$ ,  $\alpha_2(\mathbf{c}) = \mathbf{15}$
  - ▶  $\alpha_2(\mathbf{p})(x) = \mathbf{T}$  se  $x$  è multiplo di  $\mathbf{5}$ ,  $\mathbf{F}$  altrimenti
  
- ▶ Interpretazione  $\mathcal{I}_3 = (\mathcal{D}_3, \alpha_3)$ 
  - ▶ come  $\mathcal{I}_2$ , ma **Dominio:** l'insieme dei numeri naturali  $[\mathcal{D}_3 = \mathbb{N}]$

## Esempio di Semantica: Valore di Verità di Formule

	<b>Dominio</b>	$\alpha(\mathbf{a})$	$\alpha(\mathbf{b})$	$\alpha(\mathbf{c})$	$\alpha(\mathbf{p})(x) = \mathbf{T}$ sse
$\mathcal{I}_1$	città italiane	Milano	Roma	Pontedera	$x$ capoluogo
$\mathcal{I}_2$	{5, 10, 15}	5	10	15	$x$ multiplo di 5
$\mathcal{I}_3$	numeri naturali	5	10	15	$x$ multiplo di 5

<b>Formula</b>	<b>Valore in <math>\mathcal{I}_1</math></b>	<b>Valore in <math>\mathcal{I}_2</math></b>	<b>Valore in <math>\mathcal{I}_3</math></b>
$p(a)$	<b>T</b>	<b>T</b>	<b>T</b>
$p(b)$	<b>T</b>	<b>T</b>	<b>T</b>
$p(c)$	<b>F</b>	<b>T</b>	<b>T</b>
$p(a) \wedge p(c)$	<b>F</b>	<b>T</b>	<b>T</b>
$(\exists x.p(x))$	<b>T</b>	<b>T</b>	<b>T</b>
$(\forall x.p(x))$	<b>F</b>	<b>T</b>	<b>F</b>
$(\exists x.p(x)) \wedge (\exists y.\neg p(y))$	<b>T</b>	<b>F</b>	<b>T</b>

## La Semantica della Logica del Primo Ordine

- ▶ Sia fissato un linguaggio  $\mathcal{L}$  del primo ordine con alfabeto  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{V}, \mathcal{P})$ .
- ▶ Data una interpretazione  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$  e una formula  $\phi$  su  $\mathcal{L}$ , vogliamo definire in modo formale la **semantica** di  $\phi$  in  $\mathcal{I}$ , cioè il suo valore di verità
- ▶ Per far questo, dobbiamo prima dare la **semantica** dei termini che compaiono in  $\phi$ 
  - ▶ I termini **chiusi** denotano elementi del dominio
  - ▶ Se un termine contiene delle variabili, allora è **aperto**. La sua semantica dipende da un **assegnamento** che associa un elemento del dominio ad ogni variabile.

Quindi il significato dei simboli in  $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$  è determinato dall'interpretazione (dalla funzione  $\alpha$ ), mentre il significato dei simboli in  $\mathcal{V}$  è determinato da un assegnamento.

Il motivo di questa differenza sarà chiarito nelle regole per la semantica.



## Assegnamenti

- ▶ Un **assegnamento**  $\rho$  è una funzione che associa ad ogni variabile un elemento del dominio:  $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$
- ▶ Possiamo rappresentare un assegnamento anche come un insieme di coppie: per esempio se  $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$ ,  $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ ,  $\rho(x) = 0$ ,  $\rho(y) = 3$ ,  $\rho(z) = 1$ , scriviamo

$$\rho = \{x \mapsto 0, y \mapsto 3, z \mapsto 1\}$$

- ▶ Se  $\rho$  è un assegnamento, con  $\rho[d/x]$  denotiamo l'assegnamento che associa alla variabile  $x$  il valore  $d$ , e sulle altre variabili si comporta come  $\rho$ . Quindi

$$\rho[d/x](y) = \begin{cases} d & \text{se } x = y \\ \rho(y) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- ▶ Esempio: sia  $\rho$  come definito sopra, e  $\rho_1 = \rho[15/z]$ , allora

$$\rho_1 = \{x \mapsto 0, y \mapsto 3, z \mapsto 15\}$$

## Semantica dei Termini

- ▶ Ricordiamo la definizione di termine:
  - ▶ Ogni costante in  $\mathcal{C}$  è un termine e ogni variabile in  $\mathcal{V}$  è un termine
  - ▶ Se  $f$  è un simbolo di funzione in  $\mathcal{F}$  con arietà  $n$  e  $t_1, \dots, t_n$  sono termini, allora  $f(t_1, \dots, t_n)$  è un termine
  
- ▶ Data una interpretazione  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$  e un assegnamento  $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$ , la **semantica di un termine**  $t$ , in simboli  $\alpha_\rho(t)$ , è ottenuta per **induzione strutturale** con le tre regole:
  - ▶ (R0) se  $t$  è la variabile  $x$  allora  $\alpha_\rho(t) = \rho(x)$
  - ▶ (R1) se  $t$  è una costante  $c$  allora  $\alpha_\rho(t) = \alpha(c)$
  - ▶ (R3) se  $t = \mathbf{f}(t_1, \dots, t_n)$  e  $\alpha_\rho(t_1) = d_1, \dots, \alpha_\rho(t_n) = d_n$ , allora  $\alpha_\rho(t) = (\alpha(\mathbf{f}))(d_1, \dots, d_n)$
  
- ▶ Quindi la semantica di un termine è un elemento del dominio. Inoltre se il termine non contiene variabili, la sua semantica non dipende dall'assegnamento (la regola (R0) non verrà mai usata).

## Un esempio di Interpretazione

- ▶ Il linguaggio  $\mathcal{L}$ 
  - ▶  $\mathcal{C} = \{\mathbf{a}\}$
  - ▶  $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}\}$  con arietà 1
  - ▶  $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}\}$  con arietà 2
- ▶ L'interpretazione  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ 
  - ▶  $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ , insieme dei numeri naturali
  - ▶  $\alpha(\mathbf{a}) = 0$
  - ▶  $\alpha(\mathbf{f})$  è la funzione successore  $\alpha(\mathbf{f})(n) = n + 1$
  - ▶  $\alpha(\mathbf{p})$  è la relazione di maggiore sui naturali, per esempio  $\alpha(\mathbf{p})(7, 5) = \mathbf{T}$ , mentre  $\alpha(\mathbf{p})(11, 18) = \mathbf{F}$
- ▶ L'assegnamento  $\rho = \{x \mapsto 2, y \mapsto 3\}$
- ▶ Consideriamo i termini  $\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a)))$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))$ : la loro semantica sarà:
  - ▶  $\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a)))) = 3$
  - ▶  $\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))) = \alpha(x) + 1 + 1 = 4$

## Esempio di semantica di termini

Ricordiamo che  $\alpha(\mathbf{a}) = 0$ ,  $\alpha(\mathbf{f})(n) = n + 1$ , e  $\rho = \{x \mapsto 2, y \mapsto 3\}$

$$\begin{aligned}
 \alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a})))) &= \\
 \alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a})))) &= \\
 \alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))) + 1 &= \\
 \alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{a}))) + 1 &= \\
 \alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{a})) + 1 + 1 &= \\
 \alpha(\mathbf{f})(\alpha(\mathbf{a})) + 2 &= \\
 \alpha(\mathbf{a}) + 1 + 2 = 0 + 3 &= 3
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 \alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))) &= \\
 \alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(\mathbf{f}(x))) &= \\
 \alpha_\rho(\mathbf{f}(x)) + 1 &= \\
 \alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(x)) + 1 &= \\
 \alpha_\rho(x) + 1 + 1 &= \\
 \rho(x) + 2 = 2 + 2 &= 4
 \end{aligned}$$

## Semantica delle Formule

Data una interpretazione  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$  e un assegnamento  $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$ , la **semantica di una formula**  $\phi$ , denotata  $\mathcal{I}_\rho(\phi)$ , è definita per induzione strutturale dalle regole che seguono.

Ricordiamo che se  $p \in \mathcal{P}$ ,  $t_1, \dots, t_n$  sono termini, allora  $p(t_1, \dots, t_n)$  è una **formula atomica**

- ▶ (S1) se  $\phi = \mathbf{p}(t_1, \dots, t_n)$  e  $\alpha_\rho(t_1) = d_1, \dots, \alpha_\rho(t_n) = d_n$ , allora
 
$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = (\alpha(\mathbf{p})(d_1, \dots, d_n))$$
  - ▶ caso particolare: il predicato a zero argomenti, ovvero la proposizione:
 
$$\mathcal{I}_\rho(\mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p})$$
- ▶ (S2) se  $\phi = (P)$  allora  $\mathcal{I}_\rho(\phi) = \mathcal{I}_\rho(P)$ , ovvero le parentesi hanno influenza solo sull'ordine di valutazione, ma non sul valore delle formule

## Semantica dei Connettivi Logici (per Induzione Strutturale)

▶ (S3)

$$\mathcal{I}_\rho(\neg P) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

▶ (S4)

$$\mathcal{I}_\rho(P \wedge Q) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{T} \text{ e } \mathcal{I}_\rho(Q) = \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

▶ (S5)

$$\mathcal{I}_\rho(P \vee Q) = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{F} \text{ e } \mathcal{I}_\rho(Q) = \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

▶ (S6)

$$\mathcal{I}_\rho(P \Rightarrow Q) = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{T} \text{ e } \mathcal{I}_\rho(Q) = \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

▶ (S7)

$$\mathcal{I}_\rho(P \equiv Q) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathcal{I}_\rho(Q) \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

## Semantica dei Quantificatori

## ▶ (S8)

$$\mathcal{I}_\rho((\forall x.P)) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_{\rho[\mathbf{d}/x]}(P) = \mathbf{T} \text{ per qualunque } \mathbf{d} \text{ in } D \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

## ▶ (S9)

$$\mathcal{I}_\rho((\exists x.P)) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_{\rho[\mathbf{d}/x]}(P) = \mathbf{T} \text{ per almeno un } \mathbf{d} \text{ in } D \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- ▶ **Nota:** l'uso dell'assegnamento  $\rho$  è necessario per le regole dei quantificatori (S8) e (S9), infatti la sottoformula  $P$  è tipicamente una formula aperta.

## Esercizio 1

Mostrare che la formula

$$\Phi_1 = (\exists x.Q(x) \wedge (\forall y.P(x, y)))$$

è vera nell'interpretazione  $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$ , dove  $\mathbf{D} = \{a, b\}$  ed  $\alpha$  è definita come segue:

$$\alpha(P)(x, y) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ e } y = a \text{ oppure } x = a \text{ e } y = b \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\alpha(Q)(x) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ oppure } x = b \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Procedimento: Calcolare il valore di  $\mathcal{I}_{\rho_0}(\Phi_1)$  usando le regole (S1)-(S9) per induzione strutturale, dove  $\rho_0$  è un assegnamento arbitrario.



## Esercizio 2

Calcolare il valore di verità della formula

$$\Phi_2 = (\forall x. P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x))$$

nell'interpretazione  $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$ , dove  $\mathbf{D} = \{a, b, c\}$  ed  $\alpha$  è definita come segue:

$$\alpha(P)(x) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ oppure } x = b \\ \mathbf{F} & \text{se } x = c \end{cases}$$

$$\alpha(Q)(x) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ oppure } x = c \\ \mathbf{F} & \text{se } x = b \end{cases}$$

$$\alpha(R)(x) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = b \\ \mathbf{F} & \text{se } x = a \text{ oppure } x = c \end{cases}$$

Calcolare cioè il valore di  $\mathcal{I}_{\rho_0}(\Phi_2)$  usando le regole della semantica del primo ordine, dove  $\rho_0$  è un assegnamento arbitrario.