

# Logica per la Programmazione

## Lezione 8

- ▶ Modelli, Formule Valide, Conseguenza Logica
- ▶ Proof Systems
- ▶ Regole di inferenza per Calcolo Proposizionale con Premesse
- ▶ Teorema di Deduzione

## Logica del Primo Ordine: riassunto

- ▶ **Sintassi**: grammatica libera da contesto (BNF), parametrica rispetto a un alfabeto  $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{V}, \mathcal{P})$
- ▶ **Interpretazione**  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ : fissa il significato dei simboli dell'alfabeto su un opportuno dominio
- ▶ **Semantica**: data una interpretazione  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$  ed una formula  $\phi$ , le regole (S1)-(S9) permettono di calcolare in **modo induttivo** il valore di verità di  $\phi$  in  $\mathcal{I}$  rispetto a un assegnamento  $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$ , ovvero  $\mathcal{I}_\rho(\phi)$ .

## Modelli, Formule Valide, Soddisfacibili e Insoddisfacibili

- ▶ Sia  $\mathcal{I}$  un'interpretazione e  $\phi$  una formula **chiusa**. Se  $\phi$  è **vera** in  $\mathcal{I}$ , diciamo che  $\mathcal{I}$  è un **modello** di  $\phi$  e scriviamo:

$$\mathcal{I} \models \phi$$

- ▶ Se  $\Gamma$  ("Gamma") è un insieme di formule, con

$$\mathcal{I} \models \Gamma$$

intendiamo che  $\mathcal{I}$  è un **modello** di tutte le formule in  $\Gamma$

- ▶ Se una formula  $\phi$  è **vera in tutte le interpretazioni** si dice che è **valida** (estensione del concetto di tautologia) e scriviamo

$$\models \phi$$

- ▶ Se una formula  $\phi$  è vera in almeno una interpretazione si dice che è **soddisfacibile** altrimenti è **insoddisfacibile**

## Esempi

- ▶ Formula **soddisfacibile**:  $p(a)$ 
  - ▶ Basta trovare un'interpretazione che la renda vera. Per esempio:  
 $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ , con  $\mathcal{D} = \mathbb{N}$  e
    - ▶  $\alpha(\mathbf{a}) = 44$
    - ▶  $\alpha(\mathbf{p})(\mathbf{x}) = \mathbf{T}$  se  $\mathbf{x}$  è pari,  $\mathbf{F}$  altrimenti
- ▶ Formula **valida** (corrispondono alle **tautologie**):

$$(\forall x. p(x) \vee \neg p(x))$$

- ▶ Formula **insoddisfacibile** (corrispondono alle **contraddizioni**):

$$(\exists x. p(x) \wedge \neg p(x))$$

## Conseguenza Logica

- ▶ Il concetto di conseguenza logica consente di **parametrizzare la validità** di una formula  $\phi$  rispetto a un insieme di formule  $\Gamma$
- ▶ Diciamo che  $\phi$  è una **conseguenza logica** di  $\Gamma$  e scriviamo

$$\Gamma \models \phi$$

se e soltanto se  $\phi$  è **vera in tutti i modelli di  $\Gamma$** .

In altre parole, se un'interpretazione  $\mathcal{I}$  rende vere tutte le formule in  $\Gamma$  (ovvero  $\mathcal{I} \models \Gamma$ ), allora  $\mathcal{I}$  rende vera anche  $\phi$  (ovvero  $\mathcal{I} \models \phi$ )

- ▶ Caso Particolare:  $\boxed{\emptyset \models \phi}$  se e solo se  $\boxed{\models \phi}$ , cioè se  $\phi$  è valida

# I Sistemi di Dimostrazione (Proof Systems)

- ▶ Dato un insieme di formule  $\Delta$  (“Delta”), un **sistema di dimostrazione** (o **proof system**) per  $\Delta$  è un insieme di **Regole di Inferenza**
- ▶ Ciascuna **Regola di Inferenza** consente di derivare una formula (**conseguenza**) da un insieme di formule dette le (**premesse**)
- ▶ Una **Regola di Inferenza** ha la forma

$$\frac{\delta_1, \dots, \delta_k}{\delta}$$

dove  $\delta_1, \dots, \delta_k$  sono le premesse e  $\delta$  è la conseguenza, e sono tutte formule in  $\Delta$

# Dimostrazioni

- ▶ Una **dimostrazione** di una formula  $\phi$  a partire da un insieme di premesse  $\Gamma$  è una sequenza di formule  $\phi_1, \dots, \phi_n$  tale che
  - ▶ Ogni formula  $\phi_i$  è un elemento di  $\Gamma$  oppure è ottenuta applicando una regola di inferenza a partire dalle premesse  $\Gamma$  e  $\phi_1, \dots, \phi_{i-1}$
  - ▶  $\phi_n$  coincide con  $\phi$
- ▶ Scriviamo

$$\Gamma \vdash \phi$$

se esiste una dimostrazione di  $\phi$  a partire da  $\Gamma$

## Correttezza e Completezza dei Proof Systems

- ▶ Un proof system è **corretto** se quando **esiste una dimostrazione** di una formula  $\phi$  da un insieme di premesse  $\Gamma$  allora  $\phi$  è **una conseguenza logica** di  $\Gamma$ , cioè

$$\text{se } \Gamma \vdash \phi \text{ allora } \Gamma \models \phi$$

- ▶ Un proof system è **completo** se quando una formula  $\phi$  è **una conseguenza logica** di un insieme di premesse  $\Gamma$ , allora **esiste una dimostrazione** di  $\phi$  da  $\Gamma$ , cioè

$$\text{se } \Gamma \models \phi \text{ allora } \Gamma \vdash \phi$$

- ▶ Quindi completezza e correttezza mettono in relazione un concetto puramente sintattico ( $\Gamma \vdash \phi$ ) con uno semantico ( $\Gamma \models \phi$ )
- ▶ Non ha senso considerare proof system non corretti!!



# Calcolo Proposizionale come Proof System

- ▶ Il **Calcolo Proposizionale** è un **proof system** sull'insieme delle proposizioni
- ▶ Le regole di inferenza sono
  - ▶ il **principio di sostituzione** per le dimostrazioni di equivalenza
  - ▶ **i principi di sostituzione per l'implicazione**
- ▶ Il **Calcolo Proposizionale** è corretto ed anche completo, ma non vediamo le dimostrazioni

## CP come Proof System: dimostrazione del Complemento

- ▶ Quindi: una **dimostrazione** di  $\phi$  a partire da un insieme di premesse  $\Gamma$  è una sequenza  $\phi_1, \dots, \phi_n = \phi$  dove  $\phi_i \in \Gamma$  oppure è ottenuta applicando una regola di inferenza a partire da  $\Gamma$  e  $\phi_1, \dots, \phi_{i-1}$
- ▶ Vediamo come “leggere” le nostre dimostrazioni in questo modo.  $\Gamma$  sono le leggi già dimostrate. Indichiamo con **(Sost- $\equiv$ )** il *Principio di sostituzione dell'equivalenza*.

**Dimostrazione di**  $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$  (Complemento)

$$\begin{array}{ll}
 p \vee (\neg p \wedge q) & \phi_1 = p \vee (\neg p \wedge q) \equiv \underline{p \vee (\neg p \wedge q)} \\
 \equiv \{(\text{Distr.})\} & \{\text{Regola: (Sost-}\equiv\text{)}, \text{ applicata a } \phi_1 \text{ e (Distr.)}\} \\
 (p \vee \neg p) \wedge (p \vee q) & \phi_2 = p \vee (\neg p \wedge q) \equiv \underline{(p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)} \\
 \equiv \{(\text{Terzo Escluso})\} & \{(\text{Sost-}\equiv\text{)}, \text{ applicata a } \phi_2 \text{ e (Terzo Escluso)}\} \\
 \mathbf{T} \wedge (p \vee q) & \phi_3 = p \vee (\neg p \wedge q) \equiv \underline{\mathbf{T} \wedge (p \vee q)} \\
 \equiv \{(\text{Unità})\} & \{(\text{Sost-}\equiv\text{)}, \text{ applicata a } \phi_3 \text{ e (Unità)}\} \\
 (p \vee q) & \phi_4 = p \vee (\neg p \wedge q) \equiv (p \vee q)
 \end{array}$$

- ▶ Quindi le nostre dimostrazioni sono una notazione più compatta della definizione generale.

## Cosa vedremo della Logica del Primo Ordine

- ▶ Rivedremo le **Regole di Inferenza** del Calcolo Proporzionale in forma **più generale** (come proof system con premesse)
  - ▶ Per i connettivi logici useremo le leggi del CP
- ▶ Estenderemo il proof system alla Logica del Primo Ordine
  - ▶ Anche per il primo ordine ci limiteremo alle regole di inferenza che consentono di dimostrare la validità di formule del tipo:
    - ▶  $\phi \equiv \psi$
    - ▶  $\phi \Rightarrow \psi$
  - ▶ Introdurremo **nuove leggi** e **nuove regole di inferenza** per i quantificatori
  - ▶ Le regole di inferenza che introdurremo formano un proof system **corretto** per LPO
  - ▶ per LPO esistono diversi proof systems **corretti e completi** (come la *deduzione naturale* e il *calcolo dei sequenti*)

## Leggi Generali e Ipotesi (1)

- ▶ Anche nella logica del primo ordine useremo come **leggi generali formule valide** (corrispondenti alle tautologie nel calcolo proposizionale)
- ▶ L'uso di formule valide garantisce la validità del risultato. Vediamo perché:
  - ▶ Sia  $\Gamma$  un insieme di **formule valide** e  $\phi$  una formula dimostrabile a partire da  $\Gamma$ :

$$\Gamma \vdash \phi$$

- ▶ se  $\Gamma \vdash \phi$  allora per la correttezza di  $\vdash$ ,  $\Gamma \models \phi$ , ovvero  $\phi$  è vera in ogni modello  $\mathcal{I}$  di  $\Gamma$
- ▶ poiché ogni interpretazione  $\mathcal{I}$  è modello di  $\Gamma$ ,  $\phi$  è vera in ogni interpretazione  $\mathcal{I}$
- ▶ quindi è **valida**, ovvero

$$\models \phi$$

## Leggi Generali e Ipotesi (2)

- ▶ Se in  $\Gamma$ , oltre alle **formule valide** abbiamo anche altre formule (**ipotesi**) allora la dimostrazione

$$\Gamma \vdash \phi$$

non garantisce la validità di  $\phi$ , ma il fatto che  $\phi$  sia una **conseguenza logica** delle ipotesi

- ▶ ovvero se  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , dove  $\Gamma_1$  sono formule valide e  $\Gamma_2$  sono **ipotesi**, allora la dimostrazione garantisce che

$$\Gamma_2 \models \phi$$

## Generalizzazione del Principio di Sostituzione per $\equiv$

$$\frac{(P \equiv Q) \in \Gamma}{\Gamma \vdash R \equiv R[Q/P]}$$

- ▶ Nota: La generalizzazione consiste nel far riferimento ad un insieme di premesse  $\Gamma$
- ▶ “Se  $P$  e  $Q$  sono **logicamente equivalenti** nelle premesse  $\Gamma$ , allora il fatto che  $R$  e  $R[Q/P]$  sono equivalenti è dimostrabile da  $\Gamma$ ”

## Generalizzazione dei Principi di Sostituzione per $\Rightarrow$

- ▶ Dobbiamo estendere il concetto di **occorrenza positiva** o **negativa** alle formule quantificate
  - ▶  $P$  occorre **positivamente** in  $(\forall x.P)$  ed in  $(\exists x.P)$

▶

$$\frac{(P \Rightarrow Q) \in \Gamma \quad P \text{ occorre } \text{positivamente} \text{ in } R}{\Gamma \vdash R \Rightarrow R[Q/P]}$$

▶

$$\frac{(P \Rightarrow Q) \in \Gamma \quad P \text{ occorre } \text{negativamente} \text{ in } R}{\Gamma \vdash R[Q/P] \Rightarrow R}$$

## Esempi

$$\begin{aligned}
 & (\forall x. P \vee R) \wedge (\exists x. \neg P) \\
 \Rightarrow & \quad \{I_p : P \Rightarrow Q\} \\
 & (\forall x. Q \vee R) \wedge (\exists x. \neg P)
 \end{aligned}$$

Corretto perché la prima  $P$  occorre positivamente

$$\begin{aligned}
 & (\forall x. P \vee R) \wedge (\exists x. \neg P) \\
 \Rightarrow & \quad \{I_p : P \Rightarrow Q\} \\
 & (\forall x. Q \vee R) \wedge (\exists x. \neg Q)
 \end{aligned}$$

Sbagliato perché la seconda  $P$  occorre negativamente



## Teorema di Deduzione

- ▶ Sappiamo dal CP che per dimostrare che  $P \Rightarrow Q$  è una **tautologia**, basta dimostrare  $Q$  usando  $P$  come **ipotesi**
- ▶ Ora che abbiamo introdotto le premesse di una dimostrazione, possiamo giustificare questa tecnica con il **Teorema di Deduzione**:

$$\Gamma \vdash P \Rightarrow Q$$

se e solo se

$$\Gamma, P \vdash Q$$

- ▶ Ovvero per dimostrare una implicazione  $P \Rightarrow Q$  è possibile costruire una dimostrazione per  $Q$  usando sia le leggi generali (formule valide) che  $P$  come ipotesi