LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE (A,B) - a.a. 2010-2011
SOLUZIONI PROPOSTE
SECONDO APPELLO - 25/02/2011

ESERCIZIO 1

Si provi che la seguente proposizione è una tautologia:

$$((P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (\neg Q \Rightarrow P)) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow R)$$

Soluzione 1

Partiamo dalla premessa:

$(P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (\neg Q \Rightarrow P)$

$\Rightarrow$ { Trans-$\Rightarrow$ }

$(\neg Q \Rightarrow Q \vee R)$

$\equiv$ { Elim-$\Rightarrow$, doppia negazione }

$Q \vee Q \vee R$

$\equiv$ { Idempotenza-$\vee$}

$Q \vee R$

$\equiv$ { Elim-$\Rightarrow$ al contrario }

$\neg Q \Rightarrow R$

Soluzione 2

Partiamo dalla premessa:

$(P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (\neg Q \Rightarrow P)$

$\equiv$ { Elim-$\Rightarrow$, due volte }

$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (Q \vee P)$

$\Rightarrow$ { Risoluzione }

$(Q \vee R) \wedge Q$

$\Rightarrow$ { Sempl-$\wedge$}

$Q \vee R$

$\equiv$ { Elim-$\Rightarrow$ al contrario }

$\neg Q \Rightarrow R$

ESERCIZIO 2

Si provi che la seguente formula è valida (P, Q e R contengono la variabile libera x, a è una costante)

$$(\forall x.P \wedge Q) \wedge (P[^a/_x] \Rightarrow \neg R[^a/_x]) \Rightarrow \neg(\forall x.Q \Rightarrow R)$$

Soluzione Partiamo dalla premessa:

$(\forall x.P \wedge Q) \wedge (P[^a/_x] \Rightarrow \neg R[^a/_x])$

$\Rightarrow$ { Elim-$\forall$, $(\forall x.P \wedge Q)^+$ (*"occorre positivamente"*) }

$P[^a/_x] \wedge Q[^a/_x] \wedge (P[^a/_x] \Rightarrow \neg R[^a/_x])$

$\Rightarrow$ { Modus Ponens, $(P[^a/_x] \wedge (P[^a/_x] \Rightarrow \neg R[^a/_x]))^+$ }

$Q[^a/_x] \wedge \neg R[^a/_x]$

$\Rightarrow$ { Intro-$\exists$ }

$(\exists x.Q \wedge \neg R)$

$\equiv$ { Doppia negazione }

$\neg\neg(\exists x.Q \wedge \neg R)$

$\equiv$ { De Morgan }

$\neg(\forall x.\neg(Q \wedge \neg R))$

$\equiv$ { De Morgan, doppia negazione }

$\neg(\forall x.(\neg Q \vee R))$

$\equiv$ { Elim-$\Rightarrow$ al contrario }

$\neg(\forall x.Q \Rightarrow P)$

ESERCIZIO 3
Utilizzando il calcolo del primo ordine si formalizzi il seguente enunciato dichiarativo, indicando esplicitamente l'interpretazione intesa:

"Tra i prodotti in vendita sono scontati tutti e soli quelli che costano più di venti euro e non sono alcoolici"

Soluzione

- **Linguaggio**
  - $\mathbf{C} = \{20\}$
  - $\mathbf{F} = \{prezzo(\cdot)\}$
  - $\mathbf{P} = \{prodottoInVendita(\cdot), scontato(\cdot), alcolico(\cdot), maggiore(\cdot,\cdot)\}$
- **Interpretazione**: $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$
  - $\mathbf{D} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Z}$, con $\mathcal{P}$ insieme dei prodotti e $\mathcal{Z}$ insieme dei numeri razionali
  - $\alpha(20) =$ il numero 20
  - $\alpha(prezzo)(p) = c$ se il prezzo (in Euro) del prodotto p è c
  - $\alpha(prodottoInVendita)(p) \equiv \mathbf{T}$ se e solo se p è un prodotto in vendita
  - $\alpha(scontato)(p) \equiv \mathbf{T}$ se e solo se il prodotto p è scontato
  - $\alpha(alcolico)(p) \equiv \mathbf{T}$ se e solo se il prodotto p è un alcolico
  - $\alpha(maggiore)(n,m) \equiv \mathbf{T}$ se e solo se n ed m sono numeri e n è maggiore di m

Una formalizzazione è allora

$$(\forall p.prodottoInVendita(p) \Rightarrow (\neg(alcolico(p)) \wedge maggiore(prezzo(p), 20) \equiv scontato(p)))$$

Si noti che nella formula compare una doppia implicazione ($\equiv$) che formalizza correttamente la locuzione "tutti e soli" dell'enunciato.

ESERCIZIO 4
Assumendo **a : array [0, n) of nat** (con $n > 0$), si formalizzi il seguente enunciato:

"Se tutti gli elementi di a sono distinti tra loro, il suo valore minimo non occorre in prima posizione"

Soluzione
$(\forall i\, .\, (\forall j\, .\, i \in [0,n) \wedge j \in [0,n) \wedge i \neq j \Rightarrow a[i] \neq a[j])) \Rightarrow a[0] \neq (min\ x : x \in [0,n)\, .\, a[x])$
oppure
$(\forall i, j\, .\, i \in [0,n) \wedge j \in [0,n) \wedge i \neq j \Rightarrow a[i] \neq a[j]) \Rightarrow a[0] \neq (min\ x : x \in [0,n)\, .\, a[x])$

ESERCIZIO 5
Si dimostri la correttezza della seguente tripla:

$\{p = \#\{i : i \in [0,x) \mid pari(i)\} \wedge\ x > 0\}$
x : = x + 2;
p := p + 1;
$\{p = \#\{i : i \in [0,x) \mid pari(i)\}\ \}$

Soluzione Trattandosi di una sequenza, dobbiamo determinare una asserzione **R** in modo che:

(1) $\{p = \#\{i : i \in [0,x) \mid pari(i)\} \wedge\ x > 0\}$
x : = x + 2;
{ **R** }

(2) { **R** }
p := p + 1;
$\{p = \#\{i : i \in [0,x) \mid pari(i)\}\}$

Usando l'assioma dell'assegnamento, un'asserzione **R** che garantisce la validità della (2) è

$\mathbf{R} \equiv \mathit{def}(p+1) \wedge (p = \#\{i : i \in [0,x) \mid \mathit{pari}(i)\})[^{p+1}/_p]$

ovvero, osservando che $\mathit{def}(p+1) \equiv \mathbf{T}$

$\mathbf{R} \equiv (p+1 = \#\{i : i \in [0,x) \mid \mathit{pari}(i)\})$

A questo punto per dimostrare (1), usando la Regola per l'Assegnamento, dobbiamo dimostrare la seguente implicazione:

$$(p = \#\{i : i \in [0,x) \mid \mathit{pari}(i)\} \wedge\ x > 0) \Rightarrow \mathit{def}(x+2) \wedge (p+1 = \#\{i : i \in [0,x) \mid \mathit{pari}(i)\})\,[^{x+2}/_x]$$

Partiamo dalla conseguenza, osservando che $\mathit{def}(x+2) \equiv T$ e applicando la sostituzione:

$p+1 = \#\{i : i \in [0,x+2) \mid \mathit{pari}(i)\}$

$\equiv$ { Intervallo-# due volte, osservando che $x > 0$ implica $[0,x+1)$ non vuoto, e che $\mathit{pari}(x) \equiv \neg\mathit{pari}(x+1)$ }

$p+1 = \#\{i : i \in [0,x) \mid \mathit{pari}(i)\} + 1$

$\equiv$ { **Ip:** $p = \#\{i : i \in [0,x) \mid \mathit{pari}(i)\}$, calcolo }

T

Si lascia come esercizio lo sviluppo formale dei passi della dimostrazione precedente che usano la legge dell'Intervallo-#, considerando i due casi possibili: $\mathit{pari}(x)$ e $\neg\mathit{pari}(x)$.

ESERCIZIO 6

Si consideri il seguente programma annotato:

{x=A ∧ y=B}
  z := 0 ;
{Inv : z + x - y = A - B }{t: |x-y|}
while x≠y **do**
  if x > y **then** z,y := z+1, y+1 **else** z,x := z-1, x+1 **fi**
endw
{Inv ∧ x = y)}
{ z = A - B }

Scrivere e dimostrare la proprietà di invarianza.

Soluzione proposta

La proprietà di invarianza è la seguente

$\{\ z + x - y = A - B \wedge x \neq y\ \}$
  if x > y **then** z,y := z+1, y+1 **else** z,x := z-1, x+1 **fi**
$\{\ z + x - y = A - B \wedge \mathit{def}(x \neq y)\ \}$

La dimostrazione, per la regola per il condizionale, si riduce alle seguenti tre dimostrazioni:

(1) $z + x - y = A - B \wedge x \neq y \quad \Rightarrow \quad \mathit{def}(x > y)$

(2) $\{\ z + x - y = A - B \wedge x \neq y \wedge x > y\ \}$
  z,y := z+1, y+1
$\{\ z + x - y = A - B \wedge \mathit{def}(x \neq y)\ \}$

(3) $\{\ z + x - y = A - B \wedge x \neq y \wedge x \leq y\ \}$
  z,x := z-1, x+1
$\{\ z + x - y = A - B \wedge \mathit{def}(x \neq y)\ \}$

Il punto (1) è banale, essendo $\mathit{def}(x > y) \equiv T$.

(2) Dimostrazione: Per la regola dell'assegnamento multiplo, e considerando che $\mathit{def}(x \neq y) \equiv T$, dobbiamo dimostrare

$$z + x - y = A - B \wedge x \neq y \wedge x > y$$
$$\Rightarrow$$
$$\mathit{def}(z+1) \wedge \mathit{def}(y+1) \wedge (z + x - y = A - B)[^{z+1}/_z, ^{y+1}/_y]$$

Partiamo dalla conclusione:

$$
\begin{array}{ll}
& def(z+1) \wedge def(y+1) \wedge (z+x-y=A-B)[^{z+1}/_z, ^{y+1}/_y] \\
\equiv & \quad \{ \text{ Def di } def\text{, sostituzione } \} \\
& z+1+x-(y+1)=A-B \\
\equiv & \quad \{ \textbf{ Ip}\text{: } z+x-y=A-B\text{, calcolo } \} \\
& \mathbf{T}
\end{array}
$$

(3) Dimostrazione: Per la regola dell'assegnamento multiplo, e considerando che $def(x \neq y) \equiv T$, dobbiamo dimostrare

$$
\begin{array}{ll}
& z+x-y=A-B \wedge x \neq y \wedge x \leq y \\
\Rightarrow & \\
& def(z-1) \wedge def(x+1) \wedge (z+x-y=A-B)[^{z-1}/_z, ^{x+1}/_x]
\end{array}
$$

Partiamo dalla conclusione:

$$
\begin{array}{ll}
& def(z-1) \wedge def(y+1) \wedge (z+x-y=A-B)[^{z-1}/_z, ^{x+1}/_x] \\
\equiv & \quad \{ \text{ Def di } def\text{, sostituzione } \} \\
& z-1+x+1-y=A-B \\
\equiv & \quad \{ \textbf{ Ip}\text{: } z+x-y=A-B\text{, calcolo } \} \\
& \mathbf{T}
\end{array}
$$