LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE (A,B) - a.a. 2010-2011
TERZO APPELLO - 08/06/2011
SOLUZIONI PROPOSTE

ESERCIZIO 1
Si provi che la seguente proposizione è una tautologia:

$$(P \vee Q \Rightarrow R \vee S) \wedge (R \Rightarrow S) \Rightarrow (Q \wedge \neg P \Rightarrow S)$$

Soluzione
Si propone una tra le numerose possibili dimostrazioni.

$Q \wedge \neg P$
$\Rightarrow$ {Sempl-$\wedge$}
Q
$\Rightarrow$ {Intro-$\vee$}
$P \vee Q$
$\Rightarrow$ {**Ip:** $P \vee Q \Rightarrow R \vee S$}
$R \vee S$
$\Rightarrow$ {**Ip:** $R \Rightarrow S$ }
$S \vee S$
$\equiv$ { Idempotenza }
S

ESERCIZIO 2
Si provi che la seguente formula è valida (P, Q e R contengono la variabile libera x, e a è una costante)

$$(\forall x.\neg(P \Rightarrow Q)) \wedge (R[a/x] \Rightarrow Q[a/x]) \Rightarrow (\exists x.\neg(R \wedge P))$$

Soluzione
Si propone una tra le numerose possibili dimostrazioni, ragionando per assurdo.

$\neg(\exists x.\neg(R \wedge P))$
$\equiv$ {De Morgan, Doppia negazione}
$(\forall x.R \wedge P)$
$\Rightarrow$ {Elim-$\forall$}
$R[a/x] \wedge P[a/x]$
$\Rightarrow$ {**Ip:** $R[a/x] \Rightarrow Q[a/x]$}
$Q[a/x] \wedge P[a/x]$
$\Rightarrow$ {**Ip:** $(\forall x.\neg(P \Rightarrow Q))$, **Elim-**$\forall$}
$(Q[a/x] \wedge P[a/x]) \wedge \neg(P[a/x] \Rightarrow Q[a/x])$
$\equiv$ {Elim-$\Rightarrow$, De Morgan}
$Q[a/x] \wedge P[a/x] \wedge P[a/x] \wedge \neg Q[a/x]$
$\equiv$ {Contraddizione, Zero}
F

ESERCIZIO 3
Utilizzando il calcolo del primo ordine si formalizzi il seguente enunciato dichiarativo, indicando esplicitamente l'interpretazione intesa:

"Non tutti gli studenti del secondo anno hanno superato tutti gli esami del primo, ma tutti ne hanno superato almeno uno"

Soluzione
Si propone una tra le numerose possibili formalizzazioni.

Dominio : $S \cup E$

- S è l'insieme degli studenti
- E è l'insieme degli esami

Predicati : {stud_secondo_anno(·), esame_primo(·), superato(·,·)}, con

- α(stud_secondo_anno)(d) vero se e solo se d è uno studente del secondo anno
- α(esame_primo)(d) vero se e solo se d è un esame del primo anno
- α(superato)(d, d') vero se e solo se lo studente d ha superato l'esame d'

Funzioni : Insieme vuoto

Costanti : Insieme vuoto

Formalizzazione dell'enunciato:

$$(\exists s, e.\ \text{stud\_secondo\_anno}(s) \wedge \text{esame\_primo}(e) \wedge \neg\text{superato}(s,e))$$
$$\wedge$$
$$(\forall s.\ \text{stud\_secondo\_anno}(s) \Rightarrow (\exists e.\ \text{esame\_primo}(e) \wedge \text{superato}(s,e)))$$

ESERCIZIO 4
Assumendo **a : array [0, n) of nat**, si formalizzi il seguente enunciato:

"La somma di tutti gli elementi pari di **a** è strettamente maggiore della somma di tutti gli elementi di **a** con indice dispari"

NB: Leggere il testo con attenzione.

Soluzione

$$(\textstyle\sum i : i \in [0,n) \wedge a[i]\%2 = 0.\ a[i]) > (\textstyle\sum i : i \in [0,n) \wedge i\%2 = 1.\ a[i])$$

ESERCIZIO 5
Si dimostri la correttezza della seguente tripla:

$\{n > 0 \wedge j \in [0, n) \wedge s = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge i \neq j \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i)\}$
if j % 3 = 0 **then** s := s+j **else skip fi**
$\{n > 0 \wedge s = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i)\}$

dove multiplo(x,y) è vero se e soltanto se x è un multiplo di y.
(Si ricorda che il valore dell'espressione a % b è il resto della divisione intera tra a e b).

Soluzione
Trattandosi di un comando condizionale dobbiamo dimostrare

(1)
$(n > 0 \wedge j \in [0, n) \wedge s = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge i \neq j \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i)) \Rightarrow \mathit{def}(j\%3 = 0)$
ovvia essendo $\mathit{def}(j\%3 = 0) \equiv T$

(2) $\{j\%3 = 0 \wedge n > 0 \wedge j \in [0, n) \wedge s = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge i \neq j \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i)\}$
s := s+j
$\{n > 0 \wedge s = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i)\}$

(3) $\{j\%3 \neq 0 \wedge n > 0 \wedge j \in [0, n) \wedge s = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge i \neq j \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i)\}$
skip
$\{n > 0 \wedge s = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i)\}$

Osserviamo che $(j\%3 = 0) \equiv \mathit{multiplo}(j, 3)$.

Dimostrazione di (2)
Per l'assioma dell'assegnamento dobbiamo dimostrare (ignorando $\mathit{def}(s + j)$ che è equivalente a T):

$(j\%3 = 0 \wedge n > 0 \wedge j \in [0, n) \wedge s = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge i \neq j \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i))$

$\Rightarrow$

$(n > 0 \wedge s + j = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i))$

Partiamo dalla conclusione.

$n > 0 \wedge s + j = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i)$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $j \in [0, n) \wedge \mathit{multiplo}(j, 3)$, Intervallo$\}$

$n > 0 \wedge s + j = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge i \neq j \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i) + j$

$\equiv$ {calcolo}

$n > 0 \wedge s = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge i \neq j \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i)$

Dimostrazione di (3)
Per l'assioma del comando vuoto, dobbiamo dimostrare:

$(j\%3 \neq 0 \wedge n > 0 \wedge j \in [0, n) \wedge s = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge i \neq j \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i))$

$\Rightarrow$

$(n > 0 \wedge s = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i))$

Partiamo dalla conclusione.

$n > 0 \wedge s = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i)$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $j \in [0, n) \wedge \neg\mathit{multiplo}(j, 3)$, Intervallo$\}$

$n > 0 \wedge s = (\sum i \colon i \in [0, n) \wedge i \neq j \wedge \mathit{multiplo}(i, 3) \,.\, i)$

ESERCIZIO 6
Si consideri il seguente programma annotato, dove '*' è l'operatore di moltiplicazione:

$\{x = A \wedge y = B\}$
    z := 0 ;
$\{\mathsf{Inv} : x * (y - z) = A * B\ \}\{t: |y|\}$
while y≠0 **do**
    if y > 0 **then** y, z := y–1, z–1 **else** y, z := y+1, z+1 **fi**
endw
$\{\mathrm{Inv} \wedge y = 0)\}$
$\{\ x * z = -(A * B)\ \}$

Scrivere e dimostrare le proprietà di progresso e terminazione.

Soluzione

Terminazione
$Inv \Rightarrow |y| \geq 0$
Ovvia, il valore assoluto di un intero è per definizione non negativo!

Progresso
Dobbiamo dimostrare la tripla:

$\{Inv \wedge y \neq 0 \wedge |y| = V\}$
    if y > 0 **then** y, z := y–1, z–1 **else** y, z := y+1, z+1 **fi**
$\{|y| < V\}$

Trattandosi di un comando condizionale dobbiamo dimostrare

(1) $(Inv \wedge y \neq 0 \wedge |y| = V) \Rightarrow def(y > 0)$
ovvia essendo $def(y > 0) \equiv T$

(2) $\{Inv \wedge y \neq 0 \wedge |y| = V \wedge y > 0\}$
    y, z := y–1, z–1
$\{|y| < V\}$

(3) $\{Inv \wedge y \neq 0 \wedge |y| = V \wedge y \leq 0\}$
    y, z := y+1, z+1
$\{|y| < V\}$

Tralasciamo di riportare le *def* essendo tutte equivalenti a T.

Dimostrazione di (2)

Per l'assioma dell'assegnamento dobbiamo dimostrare:

$$Inv \wedge \mathrm{y} \neq 0 \wedge |\mathrm{y}| = V \wedge \mathrm{y} > 0$$

$\Rightarrow$

$$|\mathrm{y\text{-}1}| < V$$

ovvia, osservando $\mathrm{y} > 0 \Rightarrow (|\mathrm{y}| > |\mathrm{y}-1|)$.

Dimostrazione di (3)

Per l'assioma dell'assegnamento dobbiamo dimostrare:

$$Inv \wedge \mathrm{y} \neq 0 \wedge |\mathrm{y}| = V \wedge \mathrm{y} \leq 0$$

$\Rightarrow$

$$|\mathrm{y}+1| < V$$

ovvia, osservando $\mathrm{y} \leq 0 \Rightarrow (|\mathrm{y}| > |\mathrm{y}+1|)$.