LOGICA DEL PRIMO ORDINE CON INSIEMI E INTERVALLI
Esercizi proposti a lezione

Corso di Logica per la Programmazione

A.A. 2010/11

Andrea Corradini, Paolo Mancarella

RELAZIONI TRA DISUGUAGLIANZE

- Leggi (~-≤)
  - $\sim(x \leq y) \equiv x > y$
  - $\sim(x \geq y) \equiv x < y$

- Dimostriamo la prima, usando il seguente lemma:

  $x \neq y \;\equiv\; \sim(x \leq y) \vee \sim(x \geq y)$

  [con antisimm-≤, rifl-≤]

- Esercizi:
  - $\sim(x < y) \equiv x > y \vee x = y$
  - $\sim(x > y) \equiv x < y \vee x = y$

$\mathbf{x > y}$

$\equiv$ {def->}

$x \geq y \wedge x \neq y$

$\equiv$ {lemma}

$(x \geq y) \wedge (\sim(x \leq y) \vee \sim(x \geq y))$

$\equiv$ {complemento}

$\mathbf{x \geq y \;\wedge\; \sim(x \leq y)}$

$\mathbf{\sim(x \leq y)}$

$\equiv$ {totalità, $P \wedge T = P$}

$\sim(x \leq y) \wedge (x \geq y \;\vee\; x \leq y)$

$\equiv$ {complemento}

$\mathbf{\sim(x \leq y) \wedge x \geq y}$

ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI (1)

- Annidamento
  - $(\forall y.R \Rightarrow (\forall x.S \Rightarrow P)) \equiv (\forall x.S \Rightarrow (\forall y.R \Rightarrow P))$
    se y non è libera in S e x non è libera in R
  - $(\exists y.R \wedge (\exists x.S \wedge P)) \equiv (\exists x.S \wedge (\exists y.R \wedge P))$
    se y non è libera in S e x non è libera in R
- $(\forall:\wedge)$
  $(\forall x.R \Rightarrow P \wedge Q) \equiv (\forall x.R \Rightarrow P) \wedge (\forall x.R \Rightarrow Q)$
- $(\exists:\vee)$
  $(\exists x.R \wedge (P \vee Q)) \equiv (\exists x.R \wedge P) \vee (\exists x.R \wedge Q)$
- Esercizio: dimostrare le leggi elencate

ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI (2)

- Costante

$(\forall x.R \Rightarrow Z) \equiv Z$ se x non è libera in Z e R non è vuoto

$(\exists x.R \wedge Z) \equiv Z$ se x non è libera in Z e R non è vuoto

- Distributività

$(\forall x.R \Rightarrow P) \vee Z \equiv (\forall x.\ R \Rightarrow P \vee Z)$ se x non è libera in Z

$(\exists x.R \wedge P) \wedge Z \equiv (\exists x.\ R \wedge P \wedge Z)$ se x non è libera in Z

- Esercizio: dimostrare le leggi elencate

ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI (3)

- Distributività

  $(\forall x.R \Rightarrow P) \wedge Z \equiv (\forall x.\ R \Rightarrow P \wedge Z)$

  se x non è libera in Z e R non è vuoto

  $(\exists x.R \wedge P) \vee Z \equiv (\exists x.\ R \wedge (P \vee Z))$

  se x non è libera in Z e R non è vuoto

- De Morgan $\sim(\forall x.R \Rightarrow P) \equiv (\exists x.R \wedge \sim P)$

  $\sim(\exists x.R \wedge P) \equiv (\forall x.R \Rightarrow \sim P)$

- Singoletto: $(\forall x.\ x=i \Rightarrow P) \equiv P[i/x]$

  $(\exists x.\ x=i \wedge P) \equiv P[i/x]$

- Esercizio: dimostrare le leggi elencate