# QUANTIFICATORI FUNZIONALI: MINIMO, MASSIMO, SOMMATORIA, CARDINALITA'

**Corso di Logica per la Programmazione**

**A.A. 2010/11**

***Andrea Corradini, Paolo Mancarella***

# ESTENSIONE DEL PRIMO ORDINE CON QUANTIFICATORI FUNZIONALI

- Abbiamo esteso il linguaggio del primo ordine con
  - notazione intensionale per insiemi
  - simboli di disuguaglianza
  - notazione per intervalli

  e le relative leggi.
- Ora aggiungiamo alcuni “quantificatori funzionali” che saranno utili per la verifica di programmi con Triple di Hoare:
  - minimo/massimo di un insieme di valori
  - sommatoria di un insieme di valori
  - cardinalità di un insieme
    - sono quantificatori **funzionali** perché restituiscono un valore, non un booleano

# SINTASSI DEL PRIMO ORDINE CON QUANTIFICATORI FUNZIONALI

- Estendiamo le categorie sintattiche di termini, costanti ed espressioni:

Term ::= ... | ($\Sigma$ Var : Fbf .Term) | #{Var : Fbf | Fbf} |
(**max** Var : Fbf .Term) | (**min** Var : Fbf .Term) | Exp

Const ::= 0 | 1 | 2 | ... | +∞ | -∞

Exp ::= ... *ordinarie espressioni aritmetiche*

- x occorre **legata** in
  ($\Sigma$ x:P . E), #{x:P | Q}, (**max** x:P . E), (**min** x:P . E)

# QUANTIFICATORI SOMMATORIA E CARDINALITÀ: SIGNIFICATO INTUITIVO

- **($\Sigma$ x : P(x) . E(x))** denota

"la somma di tutti gli **E(v)** per tutti i **v** per cui vale **P(v)**"

- **#{ x : P(x) | Q(x)}** denota

"il numero dei **Q(v)** veri per tutti i **v** per cui vale **P(v)**"

- P è il **dominio** dei quantificatori
- # può essere definita mediante $\Sigma$

$$\#\{ x : P \mid Q\} = (\Sigma\, x : P \wedge Q \,.\, 1) \qquad \text{(Elim-\#)}$$

da cui

$$\#\{ x : P \mid Q\} = \#\{ x \mid P \wedge Q\} = \#\, \{x: P \wedge Q \mid \mathbf{T}\}$$

# MINIMIZZAZIONE E MASSIMIZZAZIONE

- **(max x:P(x) . E(x))** denota

"il massimo dei valori **E(v)** per tutti i **v** per cui vale **P(v)**"

- **(min x:P(x) . E(x))** denota

"il minimo dei valori **E(v)** per tutti i **v** per cui vale **P(v)**"

- Al solito, **P** è il **dominio** dei quantificatori

- Vale la seguente legge:

**(min x:P . –E) = – (max x:P . E)** (min:max)

# FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI CON QUANTIFICATORI FUNZIONALI

Si assuma che le sequenze siano array con dominio [0, n)

- x è il massimo comun divisore di y e z (usando il predicato **Divide(x,y)**)
- x è un numero **perfetto** (cioè è la somma dei suoi divisori eccetto se stesso)
- la sequenza **a** contiene più numeri pari che numeri dispari
- x è il numero di elementi della sequenza **a** che sono maggiori della somma degli elementi che lo precedono
- x è uguale alla somma dei quadrati degli elementi di **a** con indice pari

# LEGGI GENERALI VALIDE PER I QUANTIFICATORI FUNZIONALI

- ***Legge di ridenominazione***
  - ad esempio

    $$(\Sigma x : P \,.\, E) \equiv (\Sigma y : P[y/x] \,.E[y/x])$$

    se y non occorre né in P né in E

- ***Legge di annidamento***
  - ad esempio

    $$(\Sigma y{:}R \,.\, (\Sigma\, x{:}S \,.\, P)) = (\Sigma\, x{:}S \,.\, (\Sigma\, y{:}R \,.\, P))$$

    se y non è libero in S e x non è libero in R

# LEGGI SPECIFICHE

- $(\forall x.\ P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\mathbf{min}\ x{:}P.\ E) \geq (\mathbf{min}\ x{:}Q.\ E)$ $\qquad$ $(\mathbf{min}{:}\Rightarrow)$
- $(\forall x.\ P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\mathbf{max}\ x{:}P.\ E) \leq (\mathbf{max}\ x{:}Q.\ E)$ $\qquad$ $(\mathbf{max}{:}\Rightarrow)$
- $(\forall x.\ P \equiv Q) \Rightarrow (\mathbf{m}\ x{:}P.\ E) = (\mathbf{m}\ x{:}Q.\ E)$

  con **m** uguale a **min** o **max** $\qquad$ $(\mathbf{m}{:}\equiv)$

- $(\forall x.\ P \equiv Q) \Rightarrow \#\{\ x{:}P \mid R\} = \#\{\ x{:}Q \mid R\}$ $\qquad$ $(\#{:}\equiv)$

- $(\forall x.\ P \Rightarrow Q) \Rightarrow \#\{\ x{:}P \mid R\} \leq \#\{\ x{:}Q \mid R\}$ $\qquad$ $(\#{:}\Rightarrow)$
- $(\forall x.\ R \Rightarrow S) \Rightarrow \#\{\ x{:}P \mid R\} \leq \#\{\ x{:}P \mid S\}$

- $(\forall x.\ P \equiv Q) \Rightarrow (\boldsymbol{\Sigma} x{:}P.\ E) = (\boldsymbol{\Sigma} x{:}Q.\ E)$ $\qquad$ $(\boldsymbol{\Sigma}{:}\equiv)$

# LEGGI SPECIFICHE PER $\sum$, min, max

- $(\forall x.\ E \geq 0 \wedge P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\boldsymbol{\Sigma} x{:}P.E) \leq (\boldsymbol{\Sigma} x{:}Q.E)$ $\quad (\boldsymbol{\Sigma}{:}\Rightarrow)$
- $(\forall x.\ E \leq 0 \wedge P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\boldsymbol{\Sigma} x{:}P.E) \geq (\boldsymbol{\Sigma} x{:}Q.E)$
- $(\boldsymbol{\Sigma} x : P\ .\ E + F) = (\boldsymbol{\Sigma} x : P\ .\ E) + (\boldsymbol{\Sigma} x : P\ .\ F)$ $\quad (\boldsymbol{\Sigma}{:}+)$

- $(\mathbf{max}\ x{:}P.\ E\ \mathit{max}\ F) =$
  $(\mathbf{max}\ x{:}P.\ E)\ \mathit{max}\ (\mathbf{max}\ x{:}P.\ F)$
- $(\mathbf{min}\ x{:}P.\ E\ \mathit{min}\ F) =$
  $(\mathbf{min}\ x{:}P.\ E)\ \mathit{min}\ (\mathbf{min}\ x{:}P.\ F)$

# LEGGI DI DOMINIO

- $(\sum x:P \vee Q.E) = (\sum x:P.E) + (\sum x:Q.E) - (\sum x:P \wedge Q.E)$

- $\#\{x:P \vee Q \mid R\} =$

  $\#\{x:P \mid R\} + \#\{x:Q \mid R\} - \#\{x:P \wedge Q \mid R\}$

- $(\mathbf{max}\ x:P \vee Q.E) = (\mathbf{max}\ x:P.E)\ \mathit{max}\ (\mathbf{max}\ x:Q.E)$

- $(\mathbf{min}\ x:P \vee Q.E) = (\mathbf{min}\ x:P.E)\ \mathit{min}\ (\mathbf{min}\ x:Q.E)$

# COSTANTE E DISTRIBUTIVITÀ

- $(\boldsymbol{\Sigma} x : P \,.\, c) = c \times (\boldsymbol{\Sigma} x : P \,.\, 1)$ se x non è libera in c

- $(\mathbf{m}\ x : P \,.\, c) = c$ se x non è libera in c
  e P non è vuoto

- $(\boldsymbol{\Sigma} x : P \,.\, c \times E) = c \times (\boldsymbol{\Sigma} x : P \,.\, E)$ se x non è libera in c

- $(\mathbf{m}\ x : P \,.\, c + E) = c + (\mathbf{m}\ x : P \,.\, E)$ se x non è libera in c
  e P non è vuoto

# SINGOLETTO E VUOTO

- $(\Sigma x: x = y \,.\, E) = E[y/x]$
- $\#\{x: x = y \mid R\} = \begin{cases} 1 & \text{se } R[y/x] \\ 0 & \text{se } \sim R[y/x] \end{cases}$
- $(\Sigma x: P \,.\, E) = 0$ se P è vuoto
- $\#\{x: P \mid P\} = 0$ se P è vuoto
- $(\mathbf{min}\ x : P \,.\, E) = +\infty$ se P è vuoto
- $(\mathbf{max}\ x : P \,.\, E) = -\infty$ se P è vuoto

# INTERVALLI

$[a,b]$ un intervallo non vuoto di naturali e $k \in [a,b]$

$$(\Sigma x : x \in [a,b] \wedge P . E) = \begin{cases} (\Sigma x : x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E) + E[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\Sigma x : x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E) & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$

$$\#\{x \in [a,b] \mid P\} = \begin{cases} \#\ \{x : x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P\} + 1 & \text{se } P[k/x] \\ \#\ \{x : x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P) & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$

$$(\mathbf{m}\ x : x \in [a,b] \wedge P . E) = \begin{cases} (\mathbf{m}\ x : x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.E)\ \ m\ E[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\mathbf{m}\ x : x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.E) & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$

# INTERVALLI (specializzando per k=b)

[a,b] un intervallo non vuoto di naturali

$$(\Sigma x : x \in [a,b] \wedge P.E) = \begin{cases} (\Sigma x : x \in [a,b) \wedge P.\ E) + E[b/x] & \text{se } P[b/x] \\ (\Sigma x : x \in [a,b) \wedge P.\ E) & \text{se } \sim P[b/x] \end{cases}$$

$$\#\{x \in [a,b] \mid P\} = \begin{cases} \#\{x : x \in [a,b) \wedge P\} + 1 & \text{se } P[b/x] \\ \#\{x : x \in [a,b) \wedge P) & \text{se } \sim P[b/x] \end{cases}$$

$$(\mathbf{m}\ x : x \in [a,b] \wedge P.E) = \begin{cases} (\mathbf{m}\ x : x \in [a,b) \wedge P.E)\ \ m\ E[b/x] & \text{se } P[b/x] \\ (\mathbf{m}\ x : x \in [a,b) \wedge P.E) & \text{se } \sim P[b/x] \end{cases}$$

**Attenzione:** queste leggi sono errate nella dispensa

PROVA DI: $P[k/x] \Rightarrow$

$(\Sigma x: x \in [a,b] \wedge P.\ E) = (\Sigma x: x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E) + E[k/x]$

$(\Sigma x: x \in [a,b] \wedge P.\ E)$ = {Terzo escluso,Unità}

$(\Sigma x: x \in [a,b] \wedge (x = k \vee x \neq k) \wedge P.\ E)$ = {Distributività}

$(\Sigma x: (x \in [a,b] \wedge x=k \wedge P) \vee (x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P).\ E)$ = {Dominio}

$(\Sigma x: x \in [a,b] \wedge x=k \wedge P.\ E) + (\Sigma x: x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E)$ –

$(\Sigma x: x \in [a,b] \wedge x=k \wedge x \neq k \wedge P.\ E)$

= {Contraddizione, Vuoto}

$(\Sigma x: x \in [a,b] \wedge x=k \wedge P.\ E) + (\Sigma x: x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E)$

= {Leibniz}

$(\Sigma x: k \in [a,b] \wedge x=k \wedge P[k/x]\ .\ E) + (\Sigma x: x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E)$

= {**Ip**: $k \in [a,b] \wedge P[k/x]$ }

$(\Sigma x: x=k.\ E) + (\Sigma x: x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E)$

= {Singoletto}

$(\Sigma x: x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E) + E[k/x]$

# ESEMPIO, PROVA DI: $S = (\Sigma X: X \in [1, 3] \wedge PARI(X) \,.\, X\verb|^|2) \equiv S = 4$

$s = (\Sigma x: x \in [1, 3] \wedge pari(x) \,.\, X\verb|^|2)$

$\equiv$ {Interv, $1 \in [1,3]$, $\sim pari(1)$, def. di intervallo}

$s = (\Sigma x: x \in [2, 3] \wedge pari(x) \,.\, X\verb|^|2)$

$\equiv$ {Interv, $3 \in [2,3]$, $\sim pari(3)$, def. di intervallo}

$s = (\Sigma x: x \in [2, 2] \wedge pari(x) \,.\, X\verb|^|2)$

$\equiv$ {Interv, $2 \in [2, 2]$, pari(2), def. di intervallo}

$s = (\Sigma x: x \in (2, 2] \wedge pari(x) \,.\, X\verb|^|2) + 4$

$\equiv$ {(2,2] vuoto, Vuoto}

$s = 0 + 4$

$\equiv$ {calcolo}

$s = 4$

# ANCORA LEGGI PER GLI INTERVALLI

Sia [a,b) un intervallo non vuoto di naturali.

$\#\{x \in [a, b) \mid P\} = 0 \equiv (\forall x \in [a,b).\ {\sim}P)$

$\#\{x \in [a, b) \mid P\} > 0 \equiv (\exists x \in [a,b).\ P)$

$(\forall x \in [a,b). {\sim}P) \Rightarrow (\mathbf{max}\ x{:}\ x \in [a,b) \wedge P.x) = -\infty)$ (max-$\forall$)

$(\exists x \in [a,b).\ P) \Rightarrow (\mathbf{max}\ x{:}x \in [a,b) \wedge P.x) \in [a,b)$ (max-$\exists$)

$(\exists x \in [a,b).\ P) \Rightarrow (m = (\mathbf{max}\ x{:}\ x \in [a,b) \wedge P.x) \equiv$
$(m \in [a,b) \wedge P[m/x] \wedge (\forall x \in (m,b).\ {\sim}P))\ )$

$(\forall x \in [a,b).\ {\sim}P) \Rightarrow (\mathbf{min}\ x{:}\ x \in [a,b) \wedge P.x) = +\infty)$ (min-$\forall$)

$(\exists x \in [a,b).\ P) \Rightarrow (\mathbf{min}\ x{:}\ x \in [a,b) \wedge P) \in [a,b)$ (min-$\exists$)

$(\exists x \in [a,b).\ P) \Rightarrow (m = (\mathbf{min}\ x{:}\ x \in [a,b) \wedge P.\ x) \equiv$
$(m \in [a,b) \wedge P[m/x] \wedge (\forall x \in [a, m).\ {\sim}P))\ )$

# ESEMPIO

$(\exists x \in [a,b).\ P) \Rightarrow (b\ \mathit{max}\ (\mathbf{min}\ x : x \in [a,b) \wedge P.x)) = b$

$(\exists x \in [a,b).\ P)$

$\Rightarrow$ {min- $\exists$ }

$(\mathbf{min}\ x : x \in [a,b) \wedge P.\ x) \in [a,b)$

$\equiv$ {def. di intervallo, poniamo $m = (\mathbf{min}\ x : x \in [a,b) \wedge P.\ x)$}

$a \leq m \wedge m < b$

$\Rightarrow$ {sempl- $\wedge$}

$m < b$

$\Rightarrow$ {def. max}

$(b\ \max\ m) = b$

# ESERCIZI

Utilizzando le leggi dei quantificatori funzionali, dimostrare le seguenti formule:

- $k = (\mathbf{min}\ x : x \in [a,b) \wedge P.\ x) \wedge k \in [a,b) \Rightarrow (\forall x \in [a, k).\ {\sim}P)$ con [a,b) non vuoto
- $(((\mathbf{min}\ x : x \in [0,N) \wedge P.\ x)\ \mathit{min}\ N) \neq N) \equiv (\exists x \in [0,N)\ .P)$ con N numero naturale

# FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI

Si assuma che le sequenze siano array con dominio [0, n)

- Nella sequenza **a** c'è un solo elemento uguale alla sua posizione
- Gli elementi di indice pari della sequenza **a** sono dispari
- Definire il predicato Palindroma(**a**), che vale **T** se e solo la sequenza **a** è simmetrica rispetto al suo punto centrale
- Si esprima a parole il senso della seguente formula concernente le sequenze **a** e **b**:

$$(\forall i \in [0,n).\ a[i] = b[i - \#\{j \in [1,i] \mid a[j] = a[j-1]\}])$$

$$a = [1,1,1,3,4,4] \quad b = [1,3,4,5,5,3]$$